Feuille d'exercices 11 : Probabilités sur un univers fini (2^e Partie)

Exercice 1.
Pour se rendre au lycée, un élève a le choix entre 4 itinéraires A,B,C et D.
La probabilité qu'il a de choisir A (resp. B , C) est 1/3 (resp. 1/4, 1/12).
La probabilité d'arriver en retard en empruntant A (resp. B,C) est 1/20 (resp. 1/10,1/5).
En empruntant l'itinéraire D, il n'est jamais en retard.

1. Quelle est la probabilité que l'élève choisisse le chemin D ?
2. Quelle est la probabilité que l'élève arrive en retard ?
3. L'élève arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait emprunte l'itinéraire C ?

Exercice 2.
On effectue des tirages sans remise dans une urne contenant 5 boules rouges et 4 boules vertes. On extrait 3 boules. Quelle est la probabilité que l'on obtienne 2 boules vertes ?

Exercice 3.
Une usine fabrique 3% de pièces défectueuses. Toutes les pièces fabriquées sont contrôlées. 99 % des pièces correctes sont acceptées, et 98 % des pièces défectueuses sont refusées.
Calculer la probabilité que :

1. La pièce testée est refusée a tort.
2. La pièce testée est acceptée.
3. Le contrôle commet une erreur.

Exercice 4.
Parmi 100 dés cubiques, 75 sont équilibrés, et 25 sont truqués, de telle sorte que la probabilité d'obtenir 6 soit $\frac{1}{2}$ et que les autres numéros aient la même probabilité d'apparaître. On prend un dé au hasard parmi les 100 et on le lance.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 6 ?
2. On obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit truqué ?
3. On obtient 5. Quelle est la probabilité que ce dé ne soit pas truqué ?

Exercice 5.
On effectue des tirages sans remise dans une urne contenant 5 boules noires et 3 blanches.
Pour tout $k \in [\![1, 8]\!]$, on introduit les événements :
E_k : « la première boule noire est obtenue au k-ième tirage »
et B_k : « le k-ième tirage donne une blanche ».

1. Décrire les événements $E_1, ..., E_4$ à l'aide des autres événements.
2. En déduire les probabilités des événements $E_1, ..., E4$.
   Que valent $P(E_k)$ pour k ≥ 5 ?

Exercice 6.
On considère deux événements A et B tels que $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.
Calculer $P(B)$ sachant que A et B sont indépendants.

Exercice 7.
On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Dans chacun des cas suivants, les événements A et B suivants sont-ils indépendants ?

1. A : « tirer un roi » et B : « tirer un rouge »
2. A : « tirer une dame » et B : « tirer une figure »

Exercice 8.
On considère deux événements A et B indépendants.

1. Justifier que $P(\overline{A} \cap B) = P(A) - P(A \cap B)$ et en déduire que $\overline{A}$ et B sont indépendants.
2. En déduire que $\overline{A}$ et B sont indépendants, puis que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Feuille d'exercices 11 : Probabilités sur un univers fini (2^e Partie)

Exercice 9.
Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,1 ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel n non nul, G_n l'événement « le joueur gagne la n-ième partie» et p_n la probabilité de l'événement G_n (On a donc $p_1 = 0,1$)

1. Montrer que $p_2 = 0,62$.
   On pourra représenter les deux premières parties à l'aide d'un arbre...
2. Le joueur a gagné la deuxième partie.
   Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$.
4. Déterminer l'expression de p_n en fonction de n.

Exercice 10.
Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain. Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif. L'événement :«le n-ième sondage est positif » est noté V_n, on note p_n la probabilité de l'évènement V_n.
L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à 0,6 d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à 0,9 d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

1. Calculer les probabilités des événements suivants :
   A : «les 2^e et 3^e sondages sont positifs» ; B : «les 2^e et 3^e sondages sont négatifs».
2. Calculer la probabilité p_3 que le 3^e sondage soit positif.
3. Pour tout entier naturel n non nul, établir que : $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.
4. Déterminer l'expression de p_n en fonction de n.

Exercice 11.
Une urne U_1 contient trois boules noires et sept boules blanches. Une urne U_2 contient cinq boules noires, et cinq boules blanches. On choisit une urne au hasard (et de façon équiprobable), et on tire successivement deux boules, avec remise, dans l'urne choisie.
On note :

- B_1 l'événement « obtenir une boule blanche au premier tirage »
- B_2 l'événement « obtenir une boule blanche au deuxième tirage »

Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

Exercice 12.

1. Soient x, y et z des réels positifs ou nuls.
   Montrer l'inégalité
   $$(x + y + z)x \leq (x + z)(x + y)$$
2. En déduire que pour deux événements A et B on a
   $$P(A \cup B)P(A \cap B) \leq P(A)P(B)$$
   On pourra utiliser l'inégalité précédente avec $x = P(A \cap B)$ $y = P(\bar{A} \cap B)$ *et* $z = P(A \cap \bar{B})$