Feuille d'exercices 12 : Suites, convergence

Exercice 1. *Calcul de limites simples.*
Déterminer les limites des suites suivantes :
$a_n = 2^n + \frac{1}{n}$; $b_n = n^2 + 3n$; $c_n = \sqrt{n^2+1}$; $d_n = -3n + 5$;
$e_n = (-1)^{2n}$; $f_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}{5n^2 - 1}$ et $g_n = 2n + \ln(n)$

Exercice 2. *Forme indéterminée et factorisation.*
On considère la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{3n^3 - n - 2}{n-1}$.

1. Montrer que le polynôme défini par $P(x) = 3x^3 - x - 2$ admet 1 comme racine.
2. Écrire $P(x)$ sous la forme d'un produit de $(x-1)$ par un polynôme $Q(x)$ que l'on déterminera.
3. En utilisant cette factorisation, déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 3. *Calcul de limites simples, formes indéterminées.*
Déterminer les limites des suites suivantes :
$a_n = n^{22} - 8n^{21} + 1$; $b_n = \frac{n^3 - n^2 + 1}{n^2 - n + 1}$; $c_n = 3^n - 5^n$; $d_n = n^2 e^{-n}$; $e_n = \sqrt{n^2+1} - n$;

$f_n = \frac{21 - n^3}{n^2 + 1}$; $g_n = \frac{(n+2)!}{(2n^2+2) \times n!}$; $h_n = \frac{2 \times 3^n - 4^n}{7^n - 1}$; $i_n = \frac{2^n + 4^n - 5^n}{3^n + 2 \times 5^n}$; $j_n = \frac{-3n+1}{2-3n}$;

$k_n = -n^3 + 3n^2 - 2n + 1$; $l_n = \frac{(-1)^n + 4}{n^2}$; $m_n = \frac{2(-1)^{n^3+1}}{n+2}$; $o_n = 3n^3 + 4n^2 + 2n - 1$

Exercice 4. *Limite d'une suite.*
Soit la suite définie pour tout entier naturel non nul par : $u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geq 0$.
2. Montrer que la suite u converge vers 1.

Exercice 5. *Suite auxiliaire et limite.*
On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{2u_n + 4}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.
2. On introduit la suite t définie par $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = \frac{2u_n - 1}{u_n + 1}$.
   Montrer que la suite t est géométrique.
3. Expliciter alors t_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.
4. En déduire la convergence de la suite u et donner sa limite.

Exercice 6. *Minoration du carré et limite.*
On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

1. Montrer que pour tout entier n, $u_n > 0$ et en déduire le sens de variation de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^2 \geq 2n + 1$ et en déduire $\lim\limits_{n \to \infty} u_n$.

Exercice 7. *D'après ESC 2010, voie T.*
On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n(1 - u_n) \end{cases}$$

ainsi que la fonction f définie sur l'intervalle [0,1] par $f(x) = x(1-x)$.

1. Étudier les variations de la fonction *f*.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \in [0, 1]$.
3. Montrer que la suite (u_n) est monotone et convergente.
4. On admet que la limite l de la suite (u_n) vérifie $l = l(1-l)$. En déduire l=*0*.

Exercice 8. *Une suite sous-géométrique.*
Soit u la suite définie par $u_{n+1} = \frac{2u_n^2}{1 + 5u_n}$ et $u_0 \geq 0$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$. En déduire la monotonie de u.
2. La suite est-elle convergente ?
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq \frac{2u_n}{5}$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n u_0$.
4. En déduire la limite de la suite.

Exercice 9. *Convergence et raisonnement par l'absurde.*
Soit la suite u définie par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + u_n^4$$

1. Déterminer la monotonie de la suite u.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq 1$.
3. Étudier la convergence de cette suite.
   Indication : Supposer que la suite converge vers une limite l, déterminer l puis conclure.

Exercice 10. *Suite auxiliaire et limite.*
Soit la suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$, avec $u_0 = e$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
   On introduit la suite auxiliaire t définie par $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = \ln(u_n)$.
2. Justifier que la suite t est arithmético-géométrique.
3. En déduire l'expression de t_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.
4. En déduire la convergence de la suite u et donner sa limite.

Exercice 11. *Suites imbriquées et limites.*
On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 12$, $v_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n+2v_n}{3} \\ v_{n+1} = \frac{u_n+3v_n}{4} \end{cases}$$

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{12}(u_n - v_n)$.
   En déduire une expression de $u_n - v_n$ en fonction de n.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. On définit, pour tout entier n, $t_n = 8v_n + 3u_n$.
   Montrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie est constante.
4. Déterminer l'expression de u_n , puis de v_n , en fonction de n.
5. Déterminer les limites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 12. *D'après EDHEC 2013.*
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et la relation $u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 sous forme de fraction irréductible.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel, $0 \leq u_n \leq 1$.
3. Étudier les variations de la suite (u_n) .
4. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge.
5. On suppose que la limite L de la suite (u_n) vérifie $L = \frac{L^2+1}{2}$. Déterminer la valeur de L.

Exercice 13.
On considère la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + n + 2$.

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n$.
2. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n + n + 3$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) ainsi définie est géométrique de raison 2.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 6 \times 2^n - n - 3$.
4. Retrouver la limite de la suite (u_n) avec son expression explicite.

Exercice 14. *Étude d'une suite implicite D'après HEC.*
Partie A : Existence de la suite.
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x + \ln(x)$.

1. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers un intervalle à préciser.
3. Justifier que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution, qu'on notera u_n.

Nous venons donc de définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout entier n, $f(u_n) = u_n + \ln(u_n) = n$.

Partie B : Étude de la suite.

4. Calculer $f(1)$ et en déduire une valeur de la suite.
5. Calculer $f(2)$. Que peut-on dire de la valeur u_2 ? On admettra que $\ln(2) \simeq 0,7$
6. Pour $x > 0$, on pose $g(x) = \ln(x) - x$.
   (a) Étudier les variations de la fonction g.
   (b) En déduire que, pour tout réel $x > 0$, on a $\ln(x) < x$.
7. (a) Calculer $f\left(\frac{n}{2}\right)$ et le comparer à n. On utilisera la question 6. b)
   (b) Calculer $f(n)$ et le comparer à n.
8. En déduire que $\frac{n}{2} \leq u_n \leq n$.
9. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Partie C : Un argument imparable.
On rappelle que la fonction f est bijective, d'après la partie A.

10. Indiquer le sens de variation de la fonction f^{-1}, son domaine de définition, et ses limites aux bornes de ce domaine.
11. Justifier que, pour tout entier n, $u_n = f^{-1}(n)$.
12. En déduire le sens de variation et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
13. En raisonnant par l'absurde, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne peut converger.
    On pourra faire tendre n vers l'infini dans la formule $u_n + \ln(u_n) = n$