

## Feuille d'exercices 13 : Polynômes

### Exercice 1.

Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que les égalités suivantes soient vérifiées :

- $\forall x \in \mathbb{R}, a(x+1)(x+2) + b(x+2) = 3x^2 + 2x - 8$
- $\forall x \in \mathbb{R}, a(x-1)(x-2) + bx(x-2) + cx(x-1) = (x+1)^2$
- $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \frac{x^2+1}{x-1} = ax + b + \frac{c}{x-1}$ .

### Exercice 2.

- Déterminer l'ensemble des polynômes  $P$  de degré 2 tels que  $P(2) = 3$  et  $P'(1) = 1$ .
- Déterminer l'ensemble des polynômes  $P$  de degré 3 tels que  $P(1) = P(-1) = 3$  et  $P'(1) = 0$ .

### Exercice 3.

Déterminer l'ensemble des polynômes  $P$  de degré 2 tels que  $P(1) = 0$ ,  $P'(1) = 1$  et  $P''(1) = 4$ .

### Exercice 4.

Pour tout réel  $x$ , soit  $P(x) = 3x^3 - x - 2$ .

- Montrer que  $P$  est factorisable par  $(x-1)$ .
- Écrire  $P(x)$  sous la forme d'un produit de  $(x-1)$  par un polynôme  $Q(x)$  que l'on déterminera.
- En déduire le signe de  $P$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 5.

Soit  $P(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$ .

- Vérifier que  $X+2$  divise  $P$ .
- Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $P(X) = (X+2)(aX^2 + bX + c)$ .
- En déduire l'ensemble des racines de  $P$ .
- Résoudre l'équation  $e^{2x} - 2e^x + 6e^{-x} - 5 = 0$ .

### Exercice 6.

Pour les polynômes suivants : factoriser, déterminer les racines puis dresser le tableau de signes.

$$P(X) = 2X^3 + X^2 - 23X + 20, Q(X) = X^3 - 13X - 12 \text{ et } R(X) = 2X^2 + 2X - 4$$

### Exercice 7.

Soit  $P(X) = X^4 - 4X^3 + 10X^2 - 12X + 8$ .

- Montrer que  $P(X) + 1$  est le carré d'un polynôme  $Q$ .
- En déduire une factorisation de  $P$ .

### Exercice 8.

Déterminer un polynôme  $P$  de degré 3, se factorisant par  $(X-2)^2$  et tel que  $P(1) = 3$  et  $P(-1) = 9$ .

### Exercice 9.

Factoriser le polynôme  $P(X) = X^5 - 4X^4 + 4X^3 + 2X^2 - 5X + 2$ .

### Exercice 10.

Effectuer la division Euclidienne de  $P$  par  $Q$  dans les cas suivants :

- $P(X) = X^2 + 9X - 36$  et  $Q(X) = X - 3$
- $P(X) = X^3 + 8X^2 - 6$  et  $Q(X) = 2X + 1$
- $P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 2$  et  $Q(X) = X - 1$
- $P(X) = X^4 + X^3 - X^2 + X - 2$  et  $Q(X) = X^2 - X + 1$

### Exercice 11.

Résoudre les équations suivants, d'inconnue  $x$  :

- $m^2x + 2m = 9x - 6$
- $(m-1)x^2 - 4(m-2)x + 4m - 11 = 0$

On pourra discuter les solutions selon la valeur du paramètre  $m$ .

### Exercice 12.

Pour quelles valeurs du paramètre  $m$  les polynômes

$$P(X) = X^2 + 2X + m - 4 \text{ et } Q(X) = X^2 + X - 7m + 1$$

ont-ils une racine commune? Quelle est cette racine?