Feuille d'exercices 14 : Fonctions, convergence et continuité

Exercice 1.
Étudier la parité des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x^4+1},\ g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\ h(x) = x(x^2+2)^3(e^{x^2+1}+3)$$

$$i(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \text{ et } j(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

Exercice 2.
Déterminer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$ et en $-\infty$, si possible.

$f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$, $g(x) = x^5 - e^{2x}$, $h(x) = \frac{-3x^2+1}{2x+7}$, $i(x) = \frac{e^{3x+1}}{x^2+4}$,

$j(x) = x + \sqrt{x^2 - x + 2}$, $k(x) = \ln(x+3) - \ln(x-1)$ et $l(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

Exercice 3.
Déterminer les limites des fonctions suivantes en 0 :

$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$, $g(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x}$, $h(x) = \frac{1-e^{-x}}{2x}$ et $i(x) = x^x$.

Exercice 4.
Calculer les limites suivantes :

1. $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ en $x = 2$
2. $g(x) = \frac{1+x+x^3}{2^x}$ en $x = 0$.
3. $h(x) = \frac{\sqrt{7+x}-3}{x-2}$ en $x = 2$
4. $i(x) = \sqrt{x^2-3x+4} - x$ en $+\infty$.

Exercice 5.
Déterminer le domaine de définition, puis les limites aux bornes de ce domaine, pour :

$$f(x) = x + \sqrt{x^2-3x+2} \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(e^{2x} + e^x + 1)$$

Exercice 6. *Continuité de fonctions avec plusieurs expressions.*
Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases},\quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+3} & \text{si } x < 1 \\ e^{x^2-x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases},$$

$$h(x) = \begin{cases} x\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases},\quad i(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x^2+x)}{x^5} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$j(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases},\quad k(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases},\quad l(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 7. *Continuité d'une fonction combinant racinée carrée et partie entière.*
Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

1. Préciser son ensemble de définition.
2. Étudier la continuité de f en 0 puis plus généralement, la continuité de f sur $[-1,2]$.

Exercice 8. *Continuité d'une fonction définie par trois expressions.*
Étudier la continuité de la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 + e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 3x+1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x^2+4x-2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Exercice 9. *Prolongement par continuité.*
Les fonctions suivantes sont-elle prolongeables par continuité au point x_0 indiqué ?

1. $f(x) = \frac{\ln(1+x^4)}{3x^2}$ en $x_0 = 0$.
2. $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$ en $x_0 = 0$.
3. $h(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ en $x_0 = 0$.
4. $i(x) = \frac{2-x}{\sqrt{x-2}}$ en $x_0 = 2$.
5. $j(x) = \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$ en $x_0 = 4$.
6. $k(x) = \frac{3}{x^3-1} - \frac{2}{x^2-1}$ en $x_0 = 1$.

Exercice 10. *Équations et continuité.*
Montrer que chacune des équations suivantes admet au moins une solution :

(E_1) : $x^3 - 5x^2 + 3 + \ln(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

(E_2) : $x\ln(x) - 2 - e^{\frac{1}{x}} = 0$ sur $\mathbb{R}$.

(E_3) : $\ln(x) \times e^x - 3 = 0$ sur $[1; +\infty[$.

Exercice 11. *Équations et continuité.*

1. (a) Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 – 8x^3 + 10x^2 - 5$.
   (b) Pour quelles valeurs de α l'équation $f(x) = \alpha$ admet-elle des solutions ?.
2. Reprendre ces questions pour la fonction $f : x \mapsto x^4 - 2x^3 + x^2 - 3$.
3. Reprendre ces questions pour la fonction $f : x \mapsto x^3 + 5x^2 - 2x - 3$.

Exercice 12. *Solutions d'un équation paramétré du second degré, d'après HEC.*
On considère un nombre $p \in]0\,;1[$ et on pose $q = 1 - p$. Montrer que l'équation

$$x^2 - qx - pq = 0$$

admet deux solutions réelles distinctes x_1 et x_2 vérifiant $-1 < x_1 < 0 < x_2 < 1$.

Exercice 13. *Continuité et point fixe.*
On considère une fonction *f*, continue sur [0,1], prenant ses valeurs dans [0,1].
On note g la fonction définie sur [0,1] par : $g(x) = f(x) - x$.

1. Quel est le signe de $g(0)$? Quel est celui de $g(1)$?
2. En déduire qu'il existe au moins un réel $\alpha \in [0, 1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

Une fonction f continue sur [0,1] admet donc au moins un point fixe

Exercice 14. *Suite implicite, d'après EDHEC.*
Soit $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$. On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par :

$$\forall x > 0, f_n(x) = x - n\ln(x)$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions.
   En notant $\mathrm{u_n}$ la plus petite et $\mathrm{v_n}$ la plus grande de ces deux solutions, on vérifiera que :
   $$\forall n \geq 3, 0 < u_n < n < v_n \ .$$
2. Quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n>3}$?
3. (a) Montrer que $\forall n \geq 3, 1 < u_n < e$.
   (b) Montrer que : $\forall n \geq 3, f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$.
   En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geq 3}$.
   (c) Montrer que $(u_n)_{n\geq 3}$ est convergente, puis en encadrant $\ln(u_n)$, établir que :
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1 \ .$$

Exercice 15. *Suite implicite, d'après EDHEC.*
Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4.$$

1. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n.
   (b) Calculer u_1 et u_2.
   (c) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in]0, \dfrac{2}{3}[$.
2. (a) Montrer que, pour tout x élément de $]0, 1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
   (b) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis les variations de la suite (u_n).
   (c) Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
3. (a) Déterminer la limite de $(u_n)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) Donner enfin la valeur de ℓ.