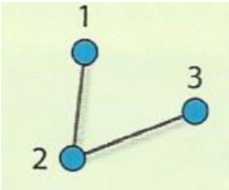
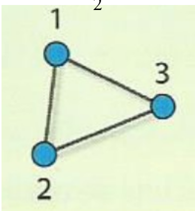
Exercice 1

Pour chacun de ces graphes, donner la matrice d'adjacence :

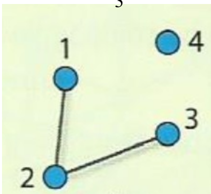
G_1



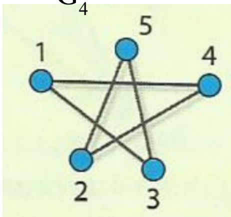
G_2



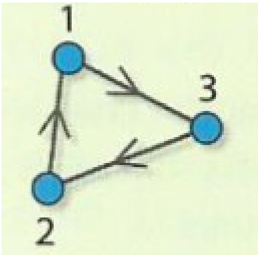
G_3



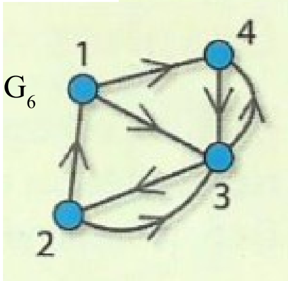
G_4



G_5



G_6



Exercice 2

On considère un graphe dont la matrice d'adjacence est

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Quel est l'ordre de ce graphe ?

2. Dessiner un tel graphe possible.

3. Le graphe est-il connexe ? Eulérien ?

Exercice 3

Soit G un graphe de sommets A, B, C, D, E avec M pour graphe d'adjacence. On donne :

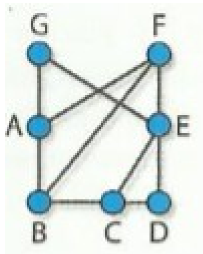
$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^3=\begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 5 & 3 & 6 \\ 5 & 7 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Construire le graphe G.

3. Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 reliant B et D. Les citer *tous*.

Exercice 4

1. Donner la matrice d'adjacence M du graphe suivant :



2. On admet que

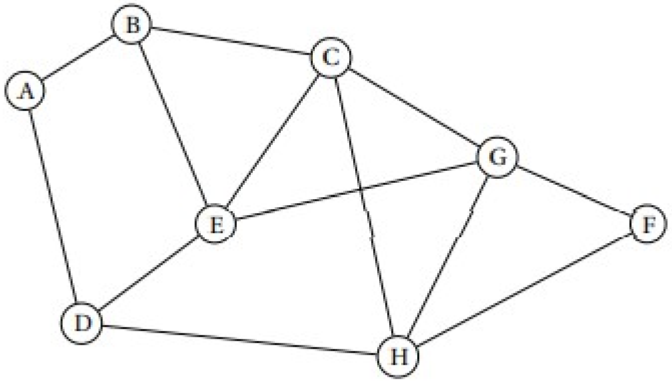
$$M^2=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

En déduire le nombre de chaînes de longueur 2 qui partent du sommet A sans jamais y revenir.

Feuille d'exercices 16 : Graphes (2e partie)

Exercice 5

Lors d’une campagne électorale, un homme politique doit effectuer une tournée dans les villes A, B, C, D, E, F, G et H, en utilisant le réseau autoroutier. Le graphe G ci-contre représente les différentes villes de la tournée et les tronçons d’autoroute reliant ces villes (une ville est représentée par un sommet, un tronçon d’autoroute par une arête)



1. a) Justifier qu’il est possible d’organiser la tournée en passant au moins une fois par chaque ville, tout en empruntant une fois et une seule chaque tronçon d’autoroute.
   b) Citer un trajet de ce type.
2. On appelle M la matrice d’adjacence associée au graphe G (les sommets étant pris dans l’ordre alphabétique).
   a) Déterminer la matrice M.
   b) On donne la matrice

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 & 5 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 7 & 2 & 8 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 9 & 10 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 9 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 8 & 9 & 9 & 4 & 4 & 10 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 4 & 2 & 6 & 6 \\ 4 & 3 & 9 & 3 & 10 & 6 & 6 & 9 \\ 1 & 5 & 10 & 8 & 4 & 6 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à H. Préciser ces chemins.

Exercice 6

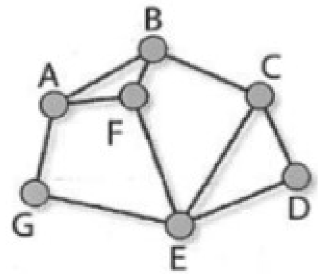
On imagine un réseau social ayant 6 abonnés (A, B, C, D, E et F) où :

- A est ami avec B, C et D
- B est ami avec A et D
- C est ami avec A, E et D
- D est ami avec tous les autres abonnés
- E est ami avec C, D et F
- F est ami avec E et D

1. Représenter ce réseau sociel par un graphe non-orienté. Est-il connexe ?
2. Dresser la liste de ses sommets et leurs degrés.
3. Calculer le degré de centralité de chaque sommet.
4. Dresser le tableau des distances entres les paires de sommets.
   Indiquer le chemin de poids minimal correspondant.
5. Calculer le degré d'intermédiarité de chaque sommet

Exercice 7

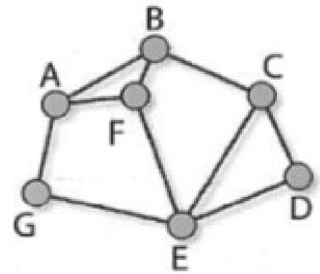
On considère le graphe représenté ci-contre :



1. Dresser la liste de ses sommets et leurs degrés.
2. Calculer le degré de centralité de chaque sommet.
3. Dresser le tableau des distances entres les paires de sommets.
   Indiquer le chemin de poids minimal correspondant.
4. Calculer le degré d'intermédiarité de chaque sommet.

Exercice 8

On reprend le graphe de l'exercice précédent.



1. Dresser la matrice d'adjacence M du graphe.
2. La matrice M² a-t-elle des coefficients nuls ?
   Expliquer sans calculer cette matrice.
3. Expliquer pourquoi la matrice
   $I_7 + M + M^2 + M^3 + M^4 + M^5 + M^6$
   n'a aucun coefficient nul.