Fiche méthode n°4 – Matrices et système linéaires.

Pour calculer la puissance d'une matrice M on peut :

- Calculer M^2 et M^3 , conjecturer une formule pour M^n , puis démontrer cette conjecture par récurrence.
- Si $M = A \times B$ avec $A \times B = B \times A$, utiliser la règle $M^n = A^n \times B^n$.
- Si $M = A + B$ avec $A \times B = B \times A$, utiliser la formule du binôme de Newton

$$M^n = (A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k A^{n-k}$$

Pour calculer l'inverse d'une matrice A, on peut :

- Si la matrice A est de taille 2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
 - Vérifier que le *déterminant* $\det(A) = ad - bc$ est non nul.
 - Calculer $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
- Si une matrice inverse B est suggérée, vérifier que $A \times B = I$.
- Trouver une matrice B telle que $A \times B = I$ en utilisant les questions précédentes.

Par exemple : si on a prouvé que $A^2 + 3A = I$, alors $A \times (A + 3I) = I$

$$\text{donc } A^{-1} = A + 3I$$

- Utiliser la *méthode du pivot de Gauss* que M. Stuker enseignera plus tard...

Pour montrer qu'un système linéaire est de Cramer, on peut :

- Dire qu'il est triangulaire et que tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.
- Utiliser la *méthode du Pivot de Gauss*, et aboutir à un système triangulaire sans zéro sur la diagonale.
- Utiliser la *méthode par substitution*, et aboutir à une solution unique.
- L'écrire sous forme matricielle $A \times X = B$.

A : coefficients, X = colonne d'inconnues, B = colonne des membres de droite

S'il est établi que la matrice A est inversible, le système est de Cramer.

Pour résoudre un système d'équations linéaire, on peut :

- Utiliser la *méthode par substitution* (efficace s'il y a beaucoup de coefficients nuls).
- Utiliser la *méthode du Pivot de Gauss*
 - Eliminer les coefficients "sous la diagonale" à l'aide d'*opérations élémentaires*
→ on aboutit à un système triangulaire.
 - Résoudre le système triangulaire.
- Ecrire le système sous forme matricielle $A \times X = B$.

Si la matrice A est inversible, et que son inverse A^{-1} a été calculé, l'unique

solution est $X = A^{-1} B$.