

Fiche méthode n°5 – Applications et dénombrement

Pour montrer qu'une application $f : E \rightarrow F$ est surjective, on peut :

- Montrer que, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède (au moins) une solution $x \in E$.
En d'autres termes : tout $y \in F$ possède au moins un antécédent $x \in E$ par l'application f .
- Si le calcul ne permet pas : utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour démontrer l'existence d'une telle solution. *Faire un tableau de variations.*
- Montrer que f est la composée de deux surjections.

Pour montrer qu'une application $f : E \rightarrow F$ n'est pas surjective, on peut :

Trouver un élément $y \in F$ qui ne possède pas d'antécédent par f .

Pour montrer qu'une application $f : E \rightarrow F$ est injective, on peut :

- Montrer l'implication $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ pour $x, x' \in E$.
- Montrer que f est strictement monotone.
- Montrer que f est la composée de deux injections

Pour montrer qu'une application $f : E \rightarrow F$ n'est pas injective, on peut :

Trouver deux éléments distincts $x \neq x'$ qui ont la même image : $f(x) = f(x')$.

Pour montrer qu'une application $f : E \rightarrow F$ est bijective, on peut :

- Montrer que f est injective et surjective.
- Montrer que, pour tout $y \in F$, l'équation
$$f(x) = y$$
possède une unique solution $x \in E$.
- Utiliser le théorème de la bijection. *Faire un tableau de variations.*
- Montrer que l'application f est la composée de deux bijections.

Pour dénombrer des tirages possibles :

- Décomposer les différentes composantes du tirage :
 - " Tirer ... ou ... " $\rightarrow$ additionner les possibilités de chaque tirage.
 - " Tirer ... et/puis ... " $\rightarrow$ multiplier les possibilités de chaque tirage.
- Identifier le type de chaque tirage :
 - Choix d'une *séquence ordonnée* (digicode, numéro de téléphone, ...) $\rightarrow n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots$ produit des possibilités pour chaque "case".
 - Choix de k éléments parmi n éléments distincts, *sans tenir compte de l'ordre* $\rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ possibilités.

Se poser la question : est-ce que l'ordre dans lequel je tire mes éléments est important ?

Exemples :

Entrées possibles d'un code à 4 chiffres : $10 \times 10 \times 10 \times 10$ possibilités.

Tirages d'une main de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes $\binom{32}{5}$ possibilités.

Pour dénombrer les anagrammes possibles d'un mot de longueur n :

- **Positionner les lettres une à une :**
Lorsqu'il reste k positions libres, on a :
 k positions possibles pour une lettre simple
 $\binom{k}{2}$ positions possibles pour un doublon, $\binom{k}{3}$ pour un triplet etc
- **Méthode du berger**
Diviser le total $n!$ par $2!$ pour chaque doublon, $3!$ pour chaque triple, etc.