Sujet de colle A

Semaine 4

Question de cours :

Rappeler le théorème sur les racines et la factorisation des polynômes du second degré.

Application : On considère le polynôme $P(X)=X^2-2(m+1)X+2m+1$, où m est un nombre réel donné.

Donner les racines et la factorisation de ce polynôme, selon la valeur que prend m.

Exercice 1

On considère le polynôme $P(X)=2X^3+X^2-23X+20$.

1. Montrer que 1 est racine de P.
2. Trouver trois réels a, b et c tels que $P(X)=(X-1)(aX^2+bX+c)$
3. En déduire l'ensemble des racines de P.
4. Résoudre l'équation $2e^{2x}+e^{x}+20e^{-x}-23=0$

Exercice 2

Soit u la suite définie par $u_{n+1}=\dfrac{2u_n^2}{1+5u_n}$ et $u_0\geq 0$.

1. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\geq 0$.
2. Etudier le sens de variation de la suite u.
3. Justifier la convergence de cette suite.
4. On admet que la limite l vérifie $l=\dfrac{2l^2}{1+5l}$. Déterminer sa valeur.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul. On appelle *n-ième polynôme cyclotomique* le polynôme

$$P_n(X)=X^n-1$$

1. Donner une racine simple, qui est commune à tous les polynômes cyclotomiques.
2. a) Écrire les polynômes cyclotomiques $P_2(X)$ et $P_3(X)$
   b) Factoriser chacun de ces polynômes par $(X-1)$
3. Trouver une factorisation générale du polynôme cyclotomique $P_n(X)$

   On pourra s'inspirer de la question 2 b) ou de la somme géométrique $\sum_{k=0}^{n-1} X^k$ ...

4. a) En distinguant les deux cas de figure « n pair » et « n impair » , dresser le tableau de variations de $P_n(X)$.
   b) Conclure : lorsque n est impair, quelles sont les racines du polynôme $P_n(X)$? Et lorsque n est pair ?

<u>Sujet de colle B</u>

Semaine 4

Question de cours :

Énoncer le théorème de la limite monotone des suites.

Donner un exemple de chaque cas de figure suivant :

- Suite décroissante qui ne converge pas.
- Suite minorée qui ne converge pas.
- Suite décroissante minorée par 0 qui ne converge pas vers 0.

Exercice 1

On considère le polynôme $P(X)=3X^3-X-2$.

1. Montrer que 1 est racine de P.

2. Déterminer les réels a,b et c tels que $P(X)=(X-1)(aX^2+bX+c)$.

3. En déduire le signe de P sur $\mathbb{R}$.

4. Résoudre l'inéquation $3x^3-x\leq 2$.

Exercice 2

On considère la suite définie par : $\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1}=u_n(1-u_n) \end{cases}$

1. Calculer les trois premiers termes de la suite sous forme de fraction irréductible.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n\in[0,1]$.

3. Montrer que la suite (u_n) est monotone et convergente.

4. On admet que la limite l de la suite (u_n) vérifie $l=l(1-l)$. Déterminer la valeur de cette limite.

Exercice 3

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4-8x^3+10x^2-3$.

2. Justifier que f réalise une surjection vers un intervalle qu'on précisera.

3. On considère désormais la fonction f comme un polynôme.

   a) D'après la question 1, combien de racines le polynôme f admet-il ?

   b) Montrer que 1 est racine de f

   c) Factoriser f , et déterminer toutes les racines de f.

Sujet de colle C (plus difficile)

Semaine 4

Question de cours :

Donner la définition de la racine d'un polynôme

Donnez un exemple d'un polynôme qui a pour seules racines 1, 2 et 3.

Exercice 1

On considère la suite définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=\dfrac{2u_n+1}{2+u_n}$.

1. Calculer les trois premiers termes de cette suite.

2. Étudier les variations de la fonction définie par $f(x)=\dfrac{2x+1}{2+x}$ sur l'intervalle [0;1].

2. Montrer que pour tout entier $n\in\mathbb{N}, 0\leq u_n\leq u_{n+1}\leq 1$.

3. En déduire que la suite (u_n) converge.

4. On admet que sa limite L vérifie $L=\dfrac{2L+1}{2+L}$. Déterminer cette limite.

Exercice 2

Soit $P(X)=X^4-4X^3+10X^2-12X+8$.

1. Trouver un polynôme Q(X) tel que $P(X)+1=Q(X)^2$.

2. En déduire une factorisation de P.

3. Résoudre l'inéquation $x^4-4x^3+10x^2-12x+8\leq 0$.

Exercice 3

1. Déterminer tous les polynômes P de degré 2 vérifiant $P(1)=0$ et $P'(1)=0$.

2. On cherche à déterminer, de manière générale,les polynômes vérifiant

$$P(1)=0 \quad , \quad P'(1)=0$$

   a) Justifier qu'on peut écrire P(X) = (X-1) Q(X) où Q(X) est un certain polynôme.

   b) En dérivant cette relation, justifier que le polynôme Q admet 1 pour racine.

   c) Conclure qu'on peut écrire $P(X)=(X-1)^2R(X)$ où R(X) est un certain polynôme.

Exercice 4

1. Déterminer les racines du polynôme $P(x)=x^2-3x+2$ et factoriser ce polynôme.

2. En déduire la limite $L=\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}\right)$.

<u>Sujet de colle Spécial Khalil</u>

Semaine 4

Question de cours

Soit P un polynôme *non nul* admettant n racines distintes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$.

Comment peut-on factoriser le polynôme P ?

Que peut-on dire sur le degré de P ?

Exercice 1

Factoriser le polynôme $P(X) = X^4 - 41X^2 + 400$

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la matrice $A^2 - 6A + 9I_2$.
2. Soit n un entier naturel.
   Justifier qu'il existe un polynôme Q(X) et deux réels a et b tels que
   $$X^n = (X^2 - 6X + 9)Q(X) + aX + b$$
3. En évaluant cette formule, ainsi que sa dérivée, en une certaine valeur de X déterminer les valeurs de a et b.
4. En déduire l'expression de la matrice A^n .

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction définie sur [0,1] par

$$f_n(x) = 1 - 2x^3 + \frac{3}{n}x(x-1)$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle [0,1].
   Dans la suite, cette solution sera notée u_n *et on se propose d'étudier la suite* (u_n) *ainsi définie.*
   On veillera à ne pas oublier son équation caractéristique : $f_n(u_n) = 0$
2. Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \dfrac{2}{n(n+1)} u_{n+1}(u_{n+1} - 1)$. *On notera que* $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$
3. En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$ puis le sens de variation de la suite (u_n)
4. Justifier que la suite (u_n) converge.
5. À l'aide d'un encadrement, montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3}{n} u_n(1 - u_n) = 0$
6. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 4

On cherche à déterminer les polynômes P vérifiant $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.

1. Quel lien existe-t-il entre le degré du polynôme $P(X)$ et le degré du polynôme $P(X^2)$?
2. En déduire que le polynôme P(X) est de degré 2.
3. Déterminer tous les polynômes P vérifiant $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$