

Sujet de colle A

Semaine 6

Question de cours :

À quelle condition est-ce qu'un graphe possède une chaîne *Eulérienne* ?

(Chaîne passant une fois exactement par chaque arête)

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

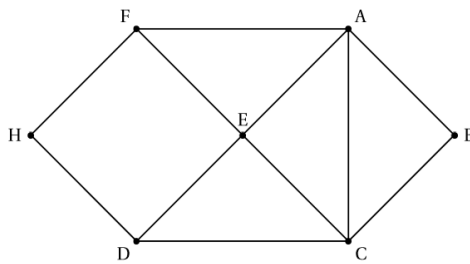
$$L_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 2x^3 + 1)$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x + 1}{x^2 + 1} \right)$$

$$L_3 = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} \right)$$

Exercice 2

On considère le graphe suivant :



1. Préciser si ce graphe est connexe en justifiant la réponse.
2. Expliquer, en justifiant, si ce graphe admet un chaîne passant une seule fois exactement par chaque arête.
Si c'est possible, en donner une.
3. Donner la matrice d'adjacence M associée au graphe. *On rangera les sommets par ordre alphabétique.*

4. On donne : $M^4 = \begin{pmatrix} 31 & 15 & 26 & 21 & 27 & 18 & 12 \\ 15 & 12 & 15 & 12 & 18 & 12 & 6 \\ 26 & 15 & 31 & 18 & 27 & 21 & 12 \\ 21 & 12 & 18 & 20 & 17 & 18 & 5 \\ 27 & 18 & 27 & 17 & 34 & 17 & 16 \\ 18 & 12 & 21 & 18 & 17 & 20 & 5 \\ 12 & 6 & 12 & 5 & 16 & 5 & ? \end{pmatrix}$

Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 4 entre les sommets B et H. Donner ces chemins.

5. Déterminer la valeur remplacée par le point d'interrogation dans la matrice M^4

Exercice 3

On considère l'application ϕ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\phi(x) = \begin{cases} 1 - x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Déterminer la limite de $\phi(x)$ en $+\infty$
2. Montrer que la fonction ϕ est continue sur $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$.
3. Justifier la dérivabilité de ϕ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer $\phi'(x)$ pour $x > 0$.
4. Dresser le tableau de variations de ϕ .
5. Montrer l'existence d'un unique réel α tel que $\phi(\alpha) = 0$ et justifier que $\sqrt{2} < \alpha < 2$.

On vous informe, à toutes fins utiles, que $\ln(2) \approx 0,7$.

Sujet de colle B

Semaine 6

Question de cours :

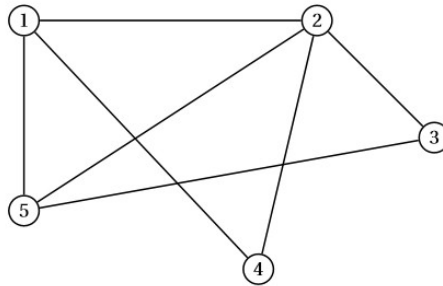
Énoncer le théorème des gendarmes pour les fonctions.

Exercice 1

Étudier la continuité de la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 1 + e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 3x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 + 4x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Exercice 2

On considère le graphe Γ ci-dessous



1. a) Le graphe Γ est-il complet ? *Justifier.*
b) Le graphe Γ est-il connexe ? *Justifier.*
2. Ce graphe admet-il une chaîne passant exactement une seule fois par chaque arête ? Si oui, en donner une.
3. Donner la matrice d'adjacence M associée au graphe Γ .
4. On donne

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 & 5 & 7 \\ 7 & 6 & 6 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 3 \\ 7 & 7 & 5 & 3 & ? \end{pmatrix}$$

Combien existe-t-il de chaînes de longueur 3 entre les sommets $n^{\circ}1$ et $n^{\circ}4$? Les citer toutes.

5. Quelle valeur a été remplacée par le point d'interrogation dans la matrice M^3 ?

Exercice 3

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions.
3. Combien de solutions possède l'équation $f(x) = 6$?
4. a) Pour quelles valeurs de α l'équation $f(x) = \alpha$ admet-elle des solutions ?
b) Combien de solutions possède l'équation $f(x) = \alpha$? *Discuter selon la valeur de α .*

Sujet de colle C (plus difficile)

Semaine 6

Question de cours :

Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 1

Un *graphe complet* est un graphe sans boucles ni arêtes doubles dont tous les sommets sont adjacents.

Lorsqu'il possède n sommets le note K_n .

1. a) Dessiner les graphes complets d'ordre 3.
b) Combien ce graphe a-t-il d'arêtes ?
c) Est-il connexe ? Expliquer.
2. Dessiner les graphes K_4 et K_5 et répondre aux mêmes questions.
3. De façon générale, on considère le graphe complet d'ordre n est noté K_n .
a) Quel est le degré de chaque sommet ?
b) Combien le graphe K_n possède-t-il d'arêtes ?

4. Application : Dans une pièce se trouvent 12 personnes qui se serrent toutes la main.

Expliquer quel graphe représente la situation, et en déduire le nombre de poignées de main échangées.

Exercice 2

On considère les fonctions définies sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x) - x$ et $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$.

1. Calculer les dérivées des fonctions f et g .
2. Dresser les tableaux de variations des fonctions f et g , en y précisant les valeurs des fonctions en 0.
3. En déduire l'encadrement $\forall x \in [0 ; +\infty[, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$
4. En déduire un encadrement de $\frac{\ln(1+x)}{x}$, puis la limite de référence $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)$.

Exercice 3

On considère un entier $n \geq 2$ et on pose, pour tout $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = x^n + 1 - nx$.

1. Montrer que la fonction f ainsi définie réalise une bijection de $I = [0 ; 1]$ vers un intervalle à préciser.
2. a) Montrer que l'équation $x^n + 1 = nx$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0 ; 1]$.

On notera u_n cette solution, qui est donc définie par la relation $f_n(u_n) = 0$.

- b) Calculer u_2 .
3. a) Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour $x \in [0, 1]$.
En évaluant en $x = u_{n+1}$, déterminer le signe de $f_n(u_{n+1})$.
b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
4. Justifier que la suite (u_n) est convergente.
5. Montrer que pour tout entier n , on a $\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{2}{n}$ et en déduire la limite de la suite (u_n) .

Sujet de colle Spécial Khalil

Semaine 6

Question de cours :

Énoncer le *théorème d'Euler* sur le lien entre les arêtes et les degrés des sommets d'un graphe.

Application : Expliquer pourquoi les sommets de degrés impairs sont forcément en nombre pair.

Exercice 1 Calculer $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x}{x^3+1}$

Exercice 2

On considère le graphe simple dont les sommets sont les entiers naturels compris entre 1 et 20, et tel que deux sommets i et j sont reliés si et seulement si $i + j \leq 21$. Demander un exemple au colleur si ce graphe n'est pas compris.

1. Le graphe est-il complet ? Justifier
2. Prouvez que ce graphe est connexe.
3. Ce graphe est-il Eulérien ? Justifier.

Exercice 3

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. On souhaite établir l'équivalence :

$$f \text{ est strictement monotone} \Leftrightarrow f \text{ est injective}$$

1. Indiquer, en justifiant brièvement, l'implication évidente.
2. On suppose f injective et continue, et on se propose de montrer que f est strictement monotone.

a) Expliquer pourquoi $f(a) \neq f(b)$. Pour simplifier, on supposera que $f(a) < f(b)$.

On suppose, par l'absurde, que f n'est pas strictement croissante.

b) Justifier l'existence de deux nombres x et y tels que $x < y$ et $f(y) - f(x) \leq 0$

c) On considère la fonction définie sur $[0; 1]$ par $\varphi(x) = f(b + t(y - b)) - f(a + t(x - a))$

Montrer qu'il existe $c \in [0; 1]$ tel que $f(c) = 0$

d) En déduire que $(1-x)(b-a) = -c(y-x)$ et aboutir à une contradiction. Conclure.

Exercice 4

Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe de 7 sommets qui représentent les bancs (noté $B_1, B_2, \dots, B_7$) d'un parc.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les arêtes modélisent les allées permettant de passer de l'un à l'autre.

1. Est-il possible de parcourir toutes les allées de ce parc sans passer deux fois par la même allée à partir du banc B_1 sans revenir obligatoirement au banc B_1 ? Idem en revenant au banc B_1 .
2. Est-il possible de parcourir des allées de ce parc en passant devant de chaque banc exactement une fois et en revenant à notre banc de départ?

3. Avec un logiciel de calcul, on a calculé la matrice M^3 :

- a) Expliquer pourquoi le graphe est connexe.
- b) Combien de chaînes de longueur 3 existe-t-il entre les sommets B_4 et B_5 ?
- c) Quels sommets peut-on quitter pour y revenir par une chaîne de longueur 3 ?

--> M^3						
ans =						
0.	5.	2.	2.	1.	2.	4.
5.	2.	2.	2.	8.	4.	1.
2.	2.	2.	3.	6.	2.	1.
2.	2.	3.	2.	6.	2.	1.
1.	8.	6.	6.	4.	6.	7.
2.	4.	2.	2.	6.	2.	2.
4.	1.	1.	1.	7.	2.	0.