Devoir libre n°7

Exercice supplémentaire pour Khalil

À rendre le 1/2/2024

Exercice 3

Soient a et b deux nombres réels positifs, avec $a \leq b$. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 = a, v_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \end{cases}$$

1. Que peut-on dire des suites (u_n) et (v_n) lorsque $a=b$? Justifiez brièvement.
2. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Que peut-on en déduire?
4. Proposer un algorithme Python qui prend en entrée deux nombres a et b , et qui calcule u_{100} et v_{100}

Note : La limite commune de ces suites est appelée *moyenne arithmético-géométrique des nombres a et b* .

Exercice 4

On rappelle qu'un graphe complet est un graphe simple (sans boucles ni arêtes doubles) dont tous les sommets sont adjacents. Lorsqu'il comporte n sommets, on le note K_n .

1. Combien d'arêtes comportent les graphes K_2 , K_3 , K_4 , K_5 ?
2. Dans le graphe complet K_n , quel est le degré de chaque sommet? Combien d'arêtes le graphe K_n comporte-t-il?
3. Retrouver ce résultat par une méthode de dénombrement.

Indication : Chaque arête est donnée par un choix de 2 sommets...