Devoir libre n°8

À rendre le 8/2/2024

D'après EMLyon 1995

Partie A : Étude d'une fonction

On considère la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=x\ln(1+x)$.

1. En dérivant cette fonction, calculer $f'(x)$ et montrer que $f''(x)=\dfrac{2+x}{(1+x)^2}$.

2. Dresser le tableau de variations de la fonction dérivée f' . En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0,+\infty[$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction *f*. On y indiquera la valeur de $f(0)$ ainsi que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Partie B : Étude d'une suite, premier cas.

On considère une suite définie par une valeur initiale $u_0\in]0\ ;e-1[$ et la relation de récurrence

$u_{n+1}=u_n\ \ln(1+u_n)$.

4. Montrer que pour tout entier naturel n, $0\leq u_n\leq e-1$.

5. Justifier que la suite (u_n) est décroissante, puis justifier que la suite est convergente.

6. On admet que la limite $L=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ vérifie l'équation $L=L\ \ln(1+L)$ (équation du point fixe)

   Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Partie C : Étude d'une suite, second cas.

À présent, on considère que $u_0\in]e-1\ ;+\infty[$ tout en maintenant la relation de récurrence $u_{n+1}=u_n\ \ln(1+u_n)$.

7. Montrer que pour tout entier naturel n, $e-1<u_n<u_{n+1}$.

8. Montrer par l'absurde que la suite (u_n) n'est pas convergente. On pourra s'inspirer de la question 6.

9. En déduire $L=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$