Devoir libre n°9

À rendre le 26/2/2023

Exercice 1 *Probabilités*

Choisir et traiter un des trois exercices *:*

Choix A (facile)

On dispose d'un sac de billes dont 9 rouges, 5 vertes et 7 bleues. On pioche quatre billes au hasard successivement et <u>sans remise</u>. Calculer la probabilité de piocher :

1. Uniquement des billes bleues
2. Uniquement des billes d'une même couleur.
3. Uniquement des billes bleues, sachant que toutes les billes sont de la même couleur.
4. Au moins une bille de chaque couleur.

Choix B (moyen)

Identique au choix A, mais en piochant les billes <u>avec remise</u>.

Choix C (plus complet)

On considère une urne U contenant deux boules blanches et une boule noire; ainsi qu'une urne V contenant une boule blanche et trois boules noires, toutes indiscernables au toucher.

On effectue une succession de tirages avec remise d'une boule dans ces urnes comme suit :

- le premier tirage a lieu dans l'urne U
- si l'on pioche une boule blanche lors d'un tirage, le tirage suivant s'effectue dans l'autre urne
- si l'on pioche une boule noire lors d'un tirage, le tirage suivant s'effectue dans la même urne

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n l'événement : "le n-ième tirage s'effectue dans l'urne U" et $u_n = P(U_n)$.

1. À l'aide d'un arbre pondéré, calculer $P(U_2)$ et $P(U_3)$.
2. À l'aide de la formule des probabilités totales ou un arbre convenable, exprimer $P(U_{n+1})$ en fonction de $P(U_n)$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{1}{12} u_n + \frac{1}{4}$
4. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Devoir libre n°9

À rendre le 26/2/2023

Exercice 2 *Séries numériques*

Choisir et traiter un des trois exercices *:*

Choix A (facile)

Calculer les séries suivantes :

$$S_1=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2\times 4^k}{5^k} \qquad S_2=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k^2-k}{2^{k+1}} \qquad S_3=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2k}{3^k} \qquad \text{et} \qquad S_4=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{6^{k+1}}{k!}$$

Choix B (plus calculatoire)

1. Déterminer deux nombres réels a et b tel que :

$$\frac{1}{x^3-x}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x}+\frac{a}{x+1}$$ pour tous les nombres réels x différents de 0, 1 et -1

2. Simplifier la somme $S_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^3-k}$ *. On utilisera la question 1, et on utilisera une écriture en extension...*

3. En déduire la valeurs de la série $\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^3-k}$

Choix C (plus complet)

Soit la suite u dénie par $u_0=\frac{1}{2}$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=u_n-u_n^2$.

1. a) Montrer $\forall n\in\mathbb{N}, 0<u_n<1$ *. On pourra opter pour l'écriture* $u_{n+1}=u_n(1-u_n)$.

   b) Étudier le sens de variation de (u_n) et montrer qu'elle converge.

   c) Déterminer sa limite. *On pourra utiliser la méthode du point fixe.*

2. Montrer que la série de terme général u_n^2 converge et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^2$

Devoir libre n°9

À rendre le 26/2/2023

Exercice 3 *Suite et convergence*

Cet exercice est obligatoire pour tout le monde.

1. On considère la polynôme $P(X)=X^3-X^2+2$.

 a) Montrer que -1 est racine de P(X).

 b) Factoriser le polynôme P(X).

 c) Dresser le tableau de signes de P(X).

2. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0=2$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=u_n^2+\dfrac{2}{u_n}$.

 a) Montrer que pour tout entier n, u_n est bien défini et $u_n\geq 2$.

 b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

 c) Montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.

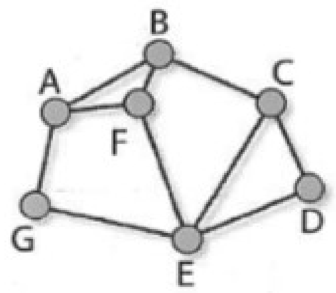
 <u>*Indication :*</u> *On pourra supposer, par l'absurde, la suite (u_n) majorée et aboutir à une contradiction en utilisant la méthode du point fixe pour trouver la limite de (u_n)*

 c) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 4 *Graphes*

Cet exercice est très facile et obligatoire pour tout le monde.

On considère le graphe représenté ci-contre :



1. Dresser la liste de ses sommets et leurs degrés.
2. Ce graphe admet-il une chaîne Eulérienne ?
3. Dresser le tableau des distances entres les paires de sommets. (Cf page 11 du chapitre 14)
4. Dresser la matrice d'adjacence M du graphe.
5. La matrice M² a-t-elle des coefficients nuls ? *Expliquer sans calculer cette matrice.*
6. Expliquer pourquoi la matrice $I_7+M+M^2+M^3+M^4+M^5+M^6$ n'a aucun coefficient nul.

Devoir libre n°9

À rendre le 26/2/2023

Exercice 5 *Continuité et étude de fonction*

Cet exercice est obligatoire pour tout le monde.

On considère la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=\ln(x)-\dfrac{1}{x}$.

1. Déterminer la limite de la fonction g en 0, et donner une interprétation géométrique de cette limite.
2. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
3. Calculer $g'(x)$ pour $x\in]0\,;+\infty[$
4. Dresser le tableau de variations de g en y indiquant les limites calculées précédemment.
5. Montrer que l'équation g(x)=0 admet une unique solution α.
6. Justifier que $\alpha\in[1\,,e]$

Exercice 6 *Python*

Choisir et traiter un des trois exercices *:*

Choix A (facile)

On considère la suite (u_n) géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0=1$.

Écrire un programme Python qui calcule la somme des 12 premiers termes de cette suite.

Choix B (moyen)

On considère la suite (u_n) géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0=1$.

Écrire un programme Python qui détermine le plus petit entier n pour lequel la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$ est supérieure à 10^9

Choix A (difficile)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ .et la relation de récurrence $u_{n+1}=-0{,}9u_n+4$.

Écrire un programme Python qui détermine le premier rang n pour lequel la différence entre deux termes consécutifs est inférieure à 10^{-5}.