Feuille d'exercices 18 : Séries numériques

Exercice 1.

1. On considère la série numérique de terme général $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ pour $n \geq 1$.
 - (a) Écrire sa n-ième somme partielle en extension.
 - (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.
 - (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.
 - (d) En déduire que la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme.
2. De la même façon, étudier la série numérique $\sum \frac{1}{4n^2-1}$.
On vérifiera que $\forall n \geq 1, \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$.

Exercice 2.

Justifier la convergence des séries suivantes, et calculer leur somme :

1. $\sum_{n \geq 0} \frac{2^{n+1}}{4^{n-1}}$	5. $\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^{n+1}}$	9. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 - n + 1}{5^n}$
2. $\sum_{n \geq 0} (n+2) \left(\frac{1}{2}\right)^n$	6. $\sum_{n \geq 0} \frac{3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n}{n!}$	10. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n n}{2^n}$
3. $\sum_{n \geq 2} \frac{n(n-1)}{3^n}$	7. $\sum_{n \geq 1} \frac{n(n-1)}{5^n}$	11. $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n n!}$
4. $\sum_{n \geq 0} \frac{3^n - 2^n}{6^n}$	8. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{4^n}$	12. $\sum_{n \geq 0} \frac{n(-1)^n}{3^n}$

Exercice 3.

Écrire un programme Python qui calcule les sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$

Exercice 4. 1. Soit k un entier naturel non nul. Justifier que

$$\ln(k+1) - \ln(k) = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

2. En déduire que

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(n+1)$$

3. Conclure quant à la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$. Est-elle convergente ?
4. Votre professeur a tenté de vérifier ce résultat sur internet...

WolframAlpha computational intelligence.

sum ln(1+1/k) from 1 to 1000000

NATURAL LANGUAGE MATH INPUT EXTENDED KEYBOARD EXAMPLES UPLOAD RANDOM

Approximated sum More digits

$\sum_{k=1}^{1000000} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) \approx 13.8155$

log(x) is the natural logarithm

Expliquer pourquoi il pourrait questionner vos calculs.

Feuille d'exercices 18 : Séries numériques

Exercice 5. 1. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

2. Pour tout entier naturel non nul n , on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

- (a) Quel est le sens de variation de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi construite?
(b) Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

(c) Justifier que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

3. Pour tout entier naturel non nul n on pose :

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}$$

- (a) Justifier que $\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
(b) En déduire que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

4. Justifier, de façon générale, la convergence de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque $\alpha \geq 2$.

Exercice 6.

1. (a) Étudier la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \ln(1+x) - x$.
(b) En déduire que $\forall x \geq 0, x \geq \ln(1+x)$.
(c) Établir que $\forall k \geq 1, \frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln(k)$.
2. On considère la série de terme général $\frac{1}{k}$ pour $k \geq 1$.
On note S_n sa n -ième somme partielle.
(a) Établir, en utilisant la question 1, que $S_n \geq \ln(n+1)$.
(b) En déduire que la série $\sum \frac{1}{k}$ est divergente.

Exercice 7.

On considère la série de terme général $u_k = \frac{2k^2}{k^3-1}$, pour $k \geq 2$.

1. Montrer que $\forall k \geq 2, u_k \geq \frac{1}{k}$.
2. En déduire la nature de la série $\sum u_k$.

Exercice 8.

Soit la suite u définie par $u_0 = \frac{1}{2}$, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. (a) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$.
(b) Étudier le sens de variation de (u_n) et montrer qu'elle converge.
(c) Déterminer sa limite.
2. Montrer que la série de terme général u_n^2 converge et calculer sa somme.
3. Quelle est la nature de la série $\sum \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$?