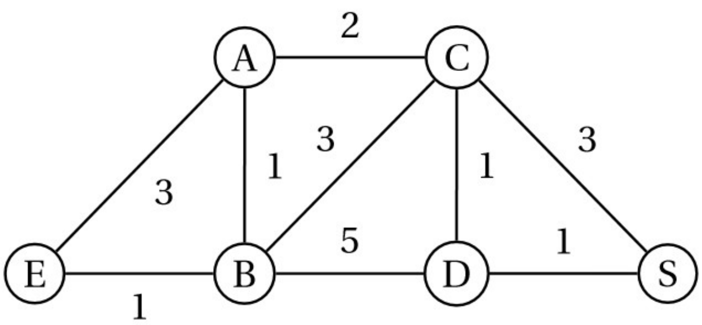
Annexe 3 : Algorithme de Dijkstra.

Cette annexe est consacrée à *l'algorithme de Dijkstra*. Cette méthode permet de trouver la chaîne de poids minimal (la plus courte) dans un graphe pondéré.

1. Exemple et recherche exhaustive.

Le graphe pondéré suivant représente un réseau routier. Les sommets représentent les villes, les arètes les routes reliant ces villes et les poids des arètes les durées (en heures) de chaque trajet.



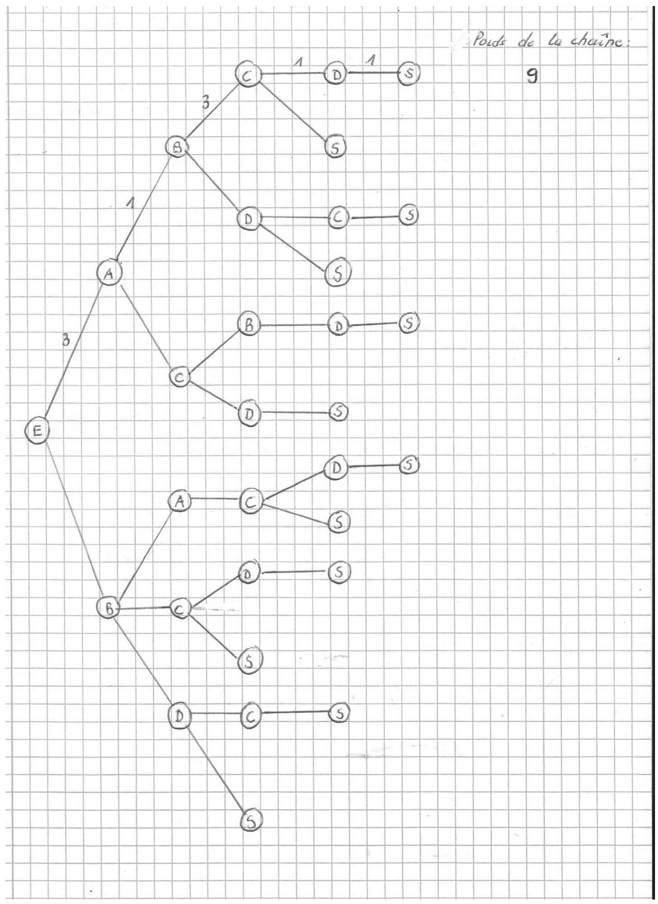
Le but est de trouver l'itinéraire le plus court entre les villes E et S.

1. Quels sont les poids des chaines E – B – D – S et E – A – C – D – S ? Interpréter ces valeurs.

2. Trouver une chaine de E à S avec un poids inférieur à ces dernières chaînes.

3. Ci-contre, on a représenté tous les trajets de E à S (sans boucles). Complétez l'abre :
   - En inscrivant le poids de chaque branche.
   - En calculant le poids total de chaque chaîne.

   Quelle chaîne a un poids minimal ?



2. Algorithme de Dijkstra.

Initialisation

Tracez un tableau avec une colonne par sommet.
Sur la première ligne, mettez : un **0** entouré pour le sommet de départ, il est *sélectionné*.
∞ pour les autres sommets.

Procédé : remplissez le tableau ligne par ligne avec les instructions suivantes.

Pour les sommets non adjacents au sommet sélectionné :
Reportez la valeur de la ligne précédente.

Pour les sommets adjacente au sommet sélectionné :
Ajoutez ***la valeur du sommet sélectionné***,
et ***le poids de l'arête qui va au sommet sélectionné***.

Si le résultat est inférieur à la valeur précédente (sur la ligne précédente) :
Inscrivez-la dans la case du sommet, et mettez le sommet sélectionné en indice.

Si le résultat est supérieur à la valeur précédente :
Reporter la valeur et la lettre précédente.

Une fois la ligne complétée, entourez la plus petite valeur de la ligne.
Le sommet correspondant est sélectionné.
Sous le sommet sélectionné, on laisse une colonne vide. Il ne sera plus pris en compte.

Conclusion

Repérez l'endroit où le sommet d'arrivée est sélectionné :
La valeur entourée correspond au poids minimal.
La lettre en indice correspond au dernier sommet visité dans la chaîne la plus courte.
→ Remontez les sommets visités un par un pour trouver la chaîne de poids minimal.

Appliquons cet algorithme au problème :

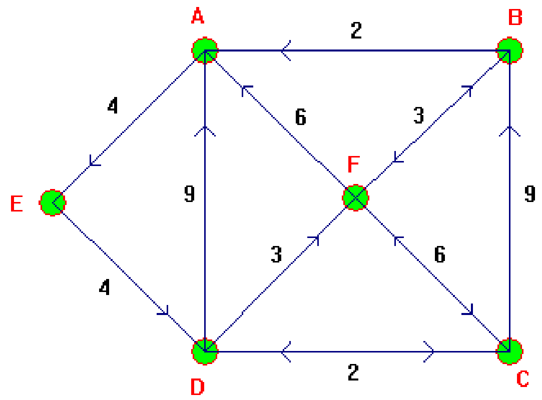
A	**B**	**C**	**D**	**E**	**S**	**Justifications**

Conclusion :

3. Exercices.

Exercice 1

On considère le graphe orienté suivant :



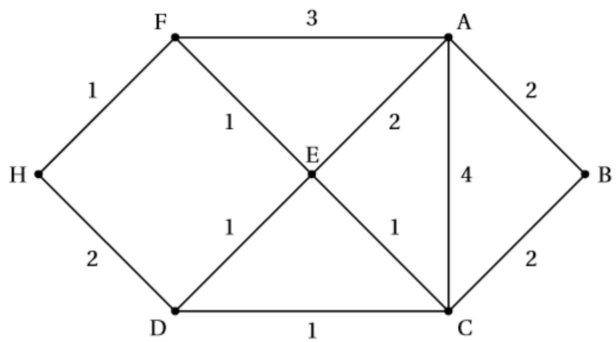
On souhaite trouver la chaîne de poids mnimal de C à A.

Complétez la troisième étape et terminez l'algorithme.

A	B	C	D	E	F	Justification
∞	∞	**0**	∞	∞	∞	Le sommet de départ est le sommet C.
∞	**9_C**		**2_C**	∞	**6_C**	Les sommets B, F et D sont adjacents à C B: 0 + 9 = 9 < ∞ ; F: 0 + 6 = 6 < ∞ ; D : 0 + 2 = 2 < ∞ Le sommet D est sélectionné.
11_D	**9_C**				**5_D**	Les sommets A et F sont adjacents à D A: 2 + 9 =11 < ∞ ; F: Le sommet est sélectionné.

Exercice 2

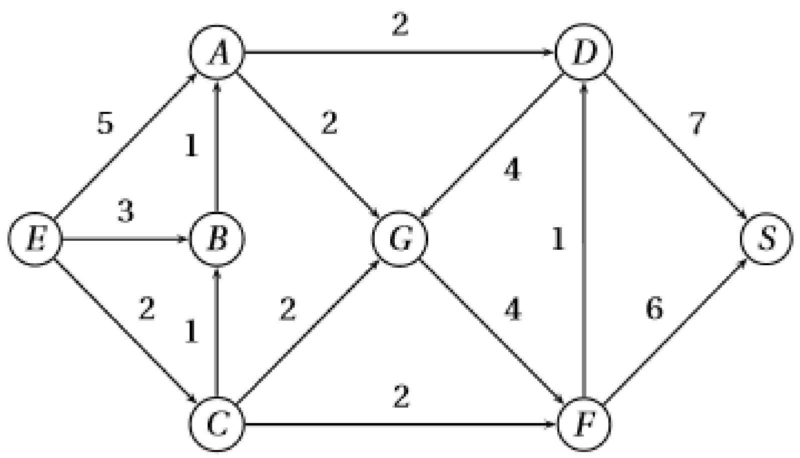
On a schématisé ci-dessous le plan d'une MJC par un graphe dont les sommets sont les salles et les arêtes sont les passages (portes, couloirs ou escaliers) entre les salles. On appelle H le hall d'entrée et B le bureau du directeur.



En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le temps minimal nécessaire pour aller de B à H.

Exercice 3

Le graphe suivant représente un réseau routier (avec des sens interdits).
Quel est l'itinéraire le plus court qui relie E à S ?



Exercice 4

Déterminer, en utilisant l'algorithme de Dijkstra, la chaîne de poids minimal entre les sommtes A et F.

Préciser le poids de cette chaîne.