Annexe 1 : Quelques éléments de dénombrement.

Cette annexe est consacrée à quelques méthodes de *dénombrement* : elles permettent compter des ensembles de possibilités.

1. Situations élémentaires.

Sous-ensembles "non ordonnés"

On possède un ensemble à n éléments.

On souhaite compter le nombre de sous-ensembles à k éléments qu'on peut former.

Il y en a exactement $\binom{k}{n}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Exemples :

- Un enfant a 10 amis, et souhaite les inviter à son anniversaire.

  Sa mère ne l'autorise qu'à inviter 4 enfants.

  Combien l'enfant a-t-il de groups d'invités possibles ?

- Au *texas hold-em*, une main est formée de 2 cartes tirées dans un jeu de 32 cartes.

  Combien y a-t-il de mains possibles ?

- Neuf personnes se retrouvent dans une soirée, et décident de se serrer la main.

  Combien de poignées de main sont échangées ?

Successions "ordonnées"

On possède un ensemble à n éléments.

On souhaite comptabiliser le nombre de "réorganisations" de ces éléments.

Il y en a exactement $n!$

Exemples :

- Combien peut-on faire de playlist avec une collection de 6 chansons ?

- Combien peut-on faire d'anagrammes avec les lettres S, I, M, O, N ?

  On dira qu'un *anagramme* est un mot qui s'écrit avec les mêmes lettres,

  même si ce mot n'a pas de sens !

- De combien de façons peut-on faire un plan de classe s'il y a 8 élèves et 8 places ?

Remarque :

Dans cette situation, l'ordre des éléments a une importance.

Ce n'était pas le cas dans la première situation.

2. Décomposition de situations composées.

Lorsque la situation étudiée ne correspond pas aux deux cas simples précédents, on essaye de la décomposer en plusiers composantes :

☞ **Si la situation se décompose en plusieur cas disjoints (... " ou " ... " ou " ...)**

On dénombre chaque cas, puis on additionne les nombres obtenus.

☞ **Si la situation se décompose en une succession de choix (... "puis " ... " puis " ...)**

On dénombre chaque cas, puis on multiplie les nombres obtenus.

Exemples :

- Une poche contient 10 jetons numérotées de 1 à 10.

  On tire 3 jetons sans remise, et on note les valeurs obtenues <u>dans l'ordre</u>.

  Combien de successions de peut-on obtenir ?

- SCH veut composer un nouveau titre, et souhaite faire des rimes extrêment riches.

  Il souhaite faire un couplet de 7 phrases dont :

  - 3 phrases se terminent en "A"
  - 2 phrases de terminen en "É"
  - 2 phrases se terminent en "O"

  Combien peut-il faire de couplets ?

- Votre valise est fermée par un code à 3 chiffres.

  Vous vous souvenez seulement que les 3 chiffres utilisés avaient la même parité.

  Combien y a-t-il de codes possibles ?

3. Réarrangements avec répétition.

Constat : Le mot COOL n'a que anagrammes, que voici :

La répétition de la lettre "O" doit être prise en compte dans le comptage des anagrammes.

<u>**Pour dénombrer des anagrammes avec des lettres qui se répètent**</u>

Méthode 1 : placer les lettres une à une dans les positions "vacantes".

Ici, on place le "C" : 4 positions possibles.

Ensuite, on place les deux "O" : Il faut en placer 2 dans les 3 positions restantes.

Il y a donc $\binom{3}{2} = 3$ placements possibles.

Pour finir, on place le "L" : 1 seule position restante.

Au total, on obtient anagrammes.

Méthode 2 : "principe du berger".

On fait comme si les deux "O" étaient différents, et on obtient 4! possibilités.

On identifie les mots qui sont en fait identiques :

☞Diviser par 2! pour chaque lettres qui apparaît en double,

par 3! pour chaque lettre en trplie, etc.

En l'occurence, on obtient anagrammes du mot COOL.

Exemple : Dénombrer les anagrammes du mot CALCUL.