

## Annexe 2 : Inversion de matrices par la méthode du pivot de Gauss

**Rappel :** Une matrice carrée  $M$  est *inversible* s'il existe une matrice  $M^{-1}$  de même taille, telle que

$$M \times M^{-1} = M^{-1} \times M = I$$

où  $I$  désigne la matrice identité (de même taille que  $M$  et  $M^{-1}$ ).

Dans ce cas, la matrice  $M^{-1}$  est appelée *matrice inverse* de  $M$ .

Pour l'heure, seul le cas des matrices de dimension 2 est complètement connu :

### **Théorème :**

Une matrice carrée d'ordre 2  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est inversible si et seulement si  $ad - cb \neq 0$

Et dans ce cas  $M^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .

Dans le cas général, on utilise *la méthode du pivot de Gauss*.

### **Pour montrer qu'une matrice $M$ est inversible :**

On applique les *opérations élémentaires* :

- Echanger deux lignes
- Multiplier une ligne par un nombre non nul
- Ajouter/soustraire un multiple d'une ligne à une autre ligne.

directement sur les lignes de la matrice  $M$  pour la mettre sous forme triangulaire.

Si tous les coefficients diagonaux de la matrice obtenue sont non nuls,  $M$  est inversible.

### **Stratégie :**

→ Travailler colonne par colonne, de la gauche vers la droite.

→ Faire apparaître, par des soustractions bien choisies, des 0 sous la diagonale.

Exemple : Etudions l'inversibilité de  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  .

**Pour calculer la matrice inverse d'une matrice inversible M :**

On présente le calcul en deux colonnes :

- Dans la colonne de gauche, on applique les *opérations élémentaires* sur les lignes de M pour la transformer en la matrice identité I.
- Dans la colonne de droite, on applique les mêmes opérations à la matrice identité I.

Lorsqu'on a obtenu la matrice I dans la colonne de gauche,  
le résultat de la colonne de droite est  $M^{-1}$ .

**Stratégie :**

→ Mettre M sous forme triangulaire (Cf méthode précédente).

→ Ensuite, repartir de la colonne de droite.

→ Faire apparaître, par des soustractions bien choisies, des 0 au-dessus de la diagonale.

La matrice obtenue est diagonale.

→ Si besoin, diviser chaque ligne de sorte à obtenir la matrice identité I.

Exemple : Calculons l'inverse de.  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Exercice 1

Déterminer, à l'aide de la méthode du *pivot de Gauss*, si les matrices suivantes sont inversibles. Le cas échéant, calculer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### Exercice 2

On considère la matrice  $A_x = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$  où  $x$  est un nombre réel.

Discuter l'inversibilité de  $A_x$  en fonction de la valeur de  $x$ .

### Exercice 3 issu d'EMLyon 2013

Montrer que la matrice suivante est inversible et calculer son inverse

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$