Fiche méthode n°9 : Graphes et polynômes

Avec les degrés des sommets d'une graphe, je peux :

- Connaître le nombre d'arêtes :
$$(\text{Somme des degrés}) = 2 \times (\text{nombre d'arêtes})$$
- Savoir si le graphe admet une *chaîne Eulérienne* (Cf point suivant)

Pour montrer qu'un graphe possède une chaîne Eulérienne

(chaîne passant une fois par chaque arête)

- Je dresse la liste des sommets et de leurs degrés.
- Je vérifie que seuls 0 ou 2 sommets ont de degrés impairs.
 - Si 2 sommets ont de degrés impairs, ils constituent le point de départ/d'arrivée de la chaîne Eulérienne.
 - Si aucun sommet n'est de degré impair, il existe un *cycle Eulérien* (chaîne fermée)

Pour montrer qu'un graphe est connexe :

Je donne une chaîne passant par chaque sommet.

→ Elle peut passer plusieurs fois par le même sommet.

Pour dresser la matrice d'adjacence :

- Je dresse une matrice carrée avec autant de lignes/colonnes que de sommets.
- Je légende les lignes/colonnes avec les noms des sommets.
- Si une arête relie deux sommets, je mets 1 sur la ligne/colonne correspondante. Sinon 0.

Avec la matrice d'adjacence M , je peux :

- Vérifier les degrés :
$$(\text{Somme d'une ligne}) = (\text{Degré du sommet correspondant})$$
- Comptabiliser les chaînes d'une certaine longueur entre une paire de sommets :
$$M^N \text{ comptabilise les chaînes de longueur } N$$
- Vérifier si le graphe est connexe :
Ce sera le cas ssi $I + M + M^2 + \dots + M^{n-1}$ n'a aucun coefficient nul.
(n =nombre de sommets)

Pour factoriser un polynôme, on peut :

- Essayer de trouver une *racine* α (tel que $P(\alpha)=0$) parmi $-1, 0, 1, 2$.
 - Écrire $P(X)=(X-\alpha)Q(X)$.
 - Déterminer $Q(X)$ en raisonnant sur son degré.
- Si le polynôme est de degré 2 :
 - Calculer son discriminant et ses racines
 - Conclure directement, avec les racines et la factorisation

$$P(X)=a(X-x_1)(X-x_2)$$