

Sur la dernière page figure une annexe qui sera à rendre avec votre DM.

Exercice 1. D'après ECRICOME 2010.

Soit a un nombre réel donné. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le but final de cet exercice est de décrire l'ensemble des matrices M vérifiant $AM = MA$.

Seules les parties C et D de cet exercice sont interdépendantes.

Partie A : Diagonalisabilité de la matrice A.

1. Calculer les matrices $(A - I_3)^2$ et $(A - I_3)^3$.
2. En déduire que la matrice A ne peut posséder qu'une seule valeur propre, qu'on précisera.
3. Calculer le sous-espace propre associée. La matrice A est-elle diagonalisable?

Partie B : Matrice semblable à la matrice A.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A .

On note également les vecteurs $u = (1, 1, 1)$, $v = (2, 1, 0)$ et $w = (1, 0, 0)$.

4. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. En utilisant la matrice A , calculer $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$.
6. Montrer que la matrice associée à l'endomorphisme f dans la base (u, v, w) est la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
7. Justifier qu'il existe une matrice inversible P (qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter) telle que $A = PBP^{-1}$.

Partie C : Commutant de la matrice B.

Dans cette partie, on notera ε l'ensemble des matrices N vérifiant $NB = BN$.

8. Montrer qu'une matrice N appartient à l'ensemble ε et seulement si elle est de la forme $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.
9. En déduire que ε est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
10. Déterminer une base et la dimension de ε .

Partie D : Lien entre les commutants de A et B.

11. Montrer l'équivalence $AM = MA \iff B(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)B$, où la matrice P a été définie dans la partie B.
12. En déduire que toute matrice M vérifiant $AM = MA$ est combinaison linéaire des matrices

$$I_3, P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ et } P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Exercice 2. *D'après ECRICOME 2002.*

Pour tout entier naturel n , on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx$$

Le but de cet exercice est d'étudier la suite I_n : limite, équivalent et forme explicite.

Partie A : Calcul des premiers termes de la suite.

1. (a) Justifier la dérivabilité de la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = (x+1)\ln(1+x) - x$, et calculer $f'(x)$.
 (b) En déduire la valeur de I_0 .
2. (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_1 = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx$.
 (b) Déterminer trois nombres réels a , b et c tels que $\forall x \in [0; 1]$, $\frac{x^2}{1+x} = ax + b + \frac{c}{1+x}$.
 (c) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx$ et conclure que $I_1 = \frac{1}{4}$.

Partie B : Convergence et limite.

3. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Justifier la convergence de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$. (On ne demande pas sa limite dans cette question)
5. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$$

6. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Partie C : Équivalent de la suite.

7. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

8. Montrer que pour tout entier naturel n

$$\frac{1}{2(n+2)} \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+2}$$

9. En déduire que

$$\frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \leq I_n \leq \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

10. Conclure que $I_n \sim \frac{\ln(2)}{n+1}$.

Partie D : Formule explicite pour calculer I_n .

Pour $x \in [0, 1]$ et $n \geq 2$, on pose :

$$S_n(x) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k.$$

11. À l'aide d'une formule du cours, montrer que :

$$S_n(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$$

12. En déduire que :

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx.$$

13. En utilisant la formule établie à la question 7., montrer que :

$$I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^n}{n+1} \left[1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k+1} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} - \ln(2) \right].$$

Exercice 3. *D'après EDHEC 2019.*

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$. On a donc, en particulier, $u_0 = 1$.

1. Déterminer u_1 et u_2 .

2. (a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

(b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

3. On se propose dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n) . Pour les questions suivantes, on admettra que pour tout nombre réel $\sigma > 0$ on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = 1$$

(a) Déterminer la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} dt$, puis celle de $\int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt$.

(b) Montrer que, pour tout réel t , on a : $e^{-t^2} \geq 1 - t^2$.

(c) En déduire que : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$, puis donner la limite de la suite (u_n) .

4. Calculer $\int_0^1 (1-t)^n dt$, puis montre que $u_n \geq \frac{1}{n+1}$.

Que peut-on déduire en ce qui concerne la série de terme général u_n ?

5. (a) Établir, grâce à une intégration par parties, que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} = (2n+2)(u_n - u_{n+1})$$

(b) En déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$

(c) On admet l'équivalent $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$. En écrivant $u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)(2n)!}$, montrer que :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

6. Informatique.

(a) Compléter la fonction **Python** nommée **facto** en annexe, afin qu'elle calcule la factorielle $n!$ à l'appel **facto(n)**.

(b) Compléter le programme en annexe, afin qu'il prenne un entier n donné par l'utilisateur et qu'il renvoie la valeur de l'intégrale u_n . *Cet algorithme fera appel à la fonction facto créée dans la question précédente.*

Problème. D'après ECRICOME 2006.

Les résultats de la partie **A** sont nécessaires pour la partie **B**. La partie **C** n'utilise aucun résultat des parties **A** et **B**, mais utilise le contexte décrit dans la partie **B**.

Partie A : Diagonalisation d'une matrice.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

1. Donner, sans aucun calcul, les valeurs propres de la matrice A .
2. Justifier, sans aucun calcul, que la matrice A est diagonalisable.
Calculer ses sous-espaces propres, en précisant une base de chacun d'eux.
3. Donner une matrice P inversible d'ordre 3, ainsi qu'une matrice D diagonale d'ordre 3 telles que :
 - La matrice P ait pour première ligne $[1 \ 1 \ 1]$
 - La matrice D ait ses valeurs diagonales dans l'ordre *décroissant*.
 - $A = PDP^{-1}$.
4. Montrer que pour tout entier naturel n , on ait $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. Vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
6. Calculer la troisième colonne de la matrice A^n .

Partie B : Suite d'épreuves aléatoires.

On dispose d'une urne qui contient trois boules numérotées de 0 à 2.

On s'intéresse à une suite d'épreuves définies de la manière suivante :

- La première épreuve consiste à choisir au hasard une boule dans cette urne.
- Si j est le numéro de la boule tirée, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à j , le tirage suivant se faisant alors dans l'urne ne contenant plus que les boules numérotées de 0 à j .

Par exemple, si on tire la boule numéro "1" au premier tirage, on élimine la boule numéro "2" de l'urne et on recommence un tirage dans l'urne qui contient désormais les boules "0" et "1".

On considère alors la variable aléatoire réelle X_k égale au numéro de la boule obtenue à la $k^{\text{ème}}$ épreuve ($k \geq 0$).

Par exemple, si les tirages produisent les numéros :

$$2 - 2 - 1 - 1 - 0 - \dots$$

on a $X_1 = 2$, $X_2 = 2$, $X_3 = 1$, $X_4 = 1$ et $X_5 = 0$. On note alors U_k la matrice-colonne définie par :

$$U_k = \begin{pmatrix} P[X_k = 0] \\ P[X_k = 1] \\ P[X_k = 2] \end{pmatrix}$$

où $P[X_k = j]$ est la probabilité de tirer la boule numéro j à la $k^{\text{ème}}$ épreuve.

On convient de définir la matrice U_0 par :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7. Donner la loi de X_1 . Calculer son espérance et sa variance. Préciser le vecteur-colonne U_1 .
8. Déterminer la loi de X_2 (On pourra s'aider d'un arbre). Calculer l'espérance et la variance de X_2 .
9. Donner les neuf probabilités totales $P_{(X_k=i)}(X_{k+1}=j)$ où i et j appartiennent à l'ensemble $\{0, 1, 2\}$.
10. Par utilisation de la formule des probabilités totales, relativement au système complet d'événements

$$((X_k = 0), (X_k = 1), (X_k = 2))$$

prouver que pour tout entier naturel k :

$$P(X_{k+1} = 0) = 1 \times P(X_k = 0) + \frac{1}{2}P(X_k = 1) + \frac{1}{3}P(X_k = 2)$$

11. Donner des formules analogues pour $P(X_{k+1} = 1)$ et $P(X_{k+1} = 2)$, puis justifier le fait que

$$U_{k+1} = AU_k$$

où la matrice A a été définie dans la partie A.

12. Écrire U_k en fonction de la matrice A , l'entier k , et la matrice-colonne U_0

13. En déduire le vecteur-colonne U_k , et conclure que

$$P(X_k = 0) = 1 - \frac{2}{2^k} + \frac{1}{3^k}, \quad P(X_k = 1) = \frac{2}{2^k} - \frac{2}{3^k} \quad \text{et} \quad P(X_k = 2) = \frac{1}{3^k}$$

14. Vérifier que l'on a :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P[X_k = 0] = 1, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} P[X_k = 1] = 0, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} P[X_k = 2] = 0$$

Interpréter et expliquer les valeurs de ces limites.

15. Compléter l'algorithme Python en annexe afin de simuler une succession de 100 tirages.

Partie C : Étude d'une autre variable aléatoire.

On reprend l'expérience décrite dans la partie B, et on note T le rang du premier tirage où la boule numéro "0" est tirée. Par exemple, si les tirages produisent les numéros :

$$2 - 2 - 1 - 0 - 0 - 0 - \dots$$

alors on a $T = 4$.

On admettra que le numéro "0" est obtenu presque sûrement à l'issue d'un nombre fini de tirages"

16. Quel est le support de la variable aléatoire T ?

17. Calculer $P(T = 1)$ et vérifier que $P(T = 2) = \frac{5}{18}$. On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.

18. On se propose de calculer $P(T = k + 1)$ (k étant un entier naturel non nul) en distinguant le résultat du premier tirage.

(a) Expliquer pourquoi on a nécessairement

$$P_{X_1=0}(T = k + 1) = 0$$

(b) Lorsqu'on tire le numéro "1" au premier tirage, quelle succession d'événements permet de tirer la boule "0" pour la première fois au tirage numéro $k + 1$? En déduire que

$$P_{X_1=1}(T = k + 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

(c) Justifier que

$$P_{X_1=2}(T = k + 1) = P(T = k)$$

19. À l'aide de la formule des probabilités totales, relativement au système complet d'événements

$$((X_1 = 0), (X_1 = 1), (X_1 = 2))$$

ainsi que la question précédente, montrer que

$$P(T = k + 1) = \frac{1}{3}P(T = k) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

pour tout entier naturel k différent de 0.

20. Vérifier que la formule précédente reste vraie pour $k = 0$.

21. En raisonnant par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul k on a :

$$P(T = k) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^k - 2\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

22. Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance et calculer $E(T)$.

23. Compléter l'algorithme Python en annexe afin de simuler la variable aléatoire T .

ANNEXE À RENDRE AVEC LE DM

NOM :

Question 6 (a) de l'exercice 3

```
1 def facto(n):
2     F=1
3     for k in range(1,n+1):
4         F=
5     return(F)
```

Question 6 (b) de l'exercice 3

```
1 n=int(input('Entrez la valeur de n'))
2 u=
3 print(u)
```

Question 15. du problème

```
1 import random
2
3 Nmax=2                                # Plus grand numéro présent dans l'urne
4
5 for ...
6     X=random.randint( ... , ... )    # Tirage d'un numéro X dans l'urne
7     if X ... Nmax:                  # Elimination des numéros supérieurs au numéro X
8         Nmax=X
9     print(X)
```

Question 21. du problème

```
1 import random
2
3 Nmax=2                                # Plus grand numéro présent dans l'urne
4 NbTirages=...                        # Nombre de tirages effectués
5
6 while ...                            # Tant que "0" n'a pas été tiré
7     X=random.randint( ... , ... )    # Tirage d'un numéro X dans l'urne
8     if X ... Nmax:                  # Elimination des numéros supérieurs au numéro X
9         Nmax=X
10    NbTirages= ...
11 print(NbTirages)
```

On rappelle que la commande `random.randint(a,b)` permet de tirer un nombre entier aléatoirement entre a et b .