Devoir Libre n°6

Exercice 1 . *Étude d'une suite d'intégrales impropres.*

1. On considère, pour tout entier naturel $n \geq 2$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(t) = \frac{e^{-t}}{1+t^n}$$

(a) Justifier la dérivabilité de la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$.

(b) Étudier les variations de la fonction f_n , préciser sa limite en $+\infty$ et sa valeur en 0.

2. On pose pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)dt$$

(a) Montrer que pour tout réel t strictement positif, $f_n(t) \leq \frac{1}{t^n}$. En déduire la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_n(t)dt$, puis de l'intégrale I_n.

(b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)dt = 0$.

(c) Montrer que pour tout réel t positif ,

$$0 \leq e^{-t} - f_n(t) \leq t^n$$

(d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt = 1 - \frac{1}{e}$

(e) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 2 . *Couple de variables aléatoires à support fini.*

On dispose d'un dé cubique classique équilibré et d'une pièce équilibrée. On lance le dé et on observe son résultat : Si celui-ci est un 6, on lance la pièce deux fois. Dans tous les autres cas, on lance la pièce une seule fois. On note X la variable aléatoire égale au résultat du dé. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de piles apparus au cours de cette expérience.

1. Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

2. Déterminer la loi du couple (X, Y). *On donnera cette loi sous forme d'un tableau à double entrée et on justifiera précisément le calcul d'au moins 2 valeurs de ce tableau.*

3. En déduire la loi marginale de Y .

4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

5. Calculer la covariance de X et Y.

6. Calculer $P(X = Y)$.

Exercice 3 . *Diagonalisation* ***(exercice optionnel)***.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Justifier que A est diagonalisable et diagonaliser A.