Devoir Libre n°7

Exercice 1 *Variables aléatoires à densité.*

1. **Étude d'une variable aléatoire.**
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que la fonction f est une densité de probabilités.
Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.
On notera F la fonction de répartition de X.

(b) Justifier que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que pour tout réel x,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1+x)e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(d) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance, que l'on calculera.

2. **Étude d'un transfert.**
On considère la variable aléatoire $Y = e^X$.

(a) Soit $x \leq 0$. Combien vaut $P(Y \leq x)$?

(b) Déterminer la probabilité $P(Y \leq x)$ lorsque $x > 0$.

(c) En déduire que la fonction de répartition de Y est donnée par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1-\frac{1+\ln(x)}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

et en déduire la densité de Y.

(d) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ?

Exercice 2 *Diagonalisation et racine carrée d'une matrice.*
On considère les matrices carrées d'ordre trois :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Partie I : Réduction de A

1. Est-ce que A est inversible ?

2. Déterminer les valeurs propres de A.
Justifier, sans calcul, que A est diagonalisable.

3. Déterminer une matrice carrée P d'ordre trois, inversible, dont tous les termes diagonaux sont égaux à 1, telle que $A = P\ D\ P^{-1}$ et calculer P^{-1}.

Partie II : Résolution de l'équation $M^2 = A$
On se propose de résoudre l'équation

$$(1) : M^2 = A$$

d'inconnue M, matrice carrée d'ordre trois.

Soit M une matrice carrée d'ordre trois. On note $N = P^{-1}M\ P$.
(La matrice P a été définie en **I.3.**)

1. Montrer : $M^2 = A \Longleftrightarrow N^2 = D$.

2. Établir que, si $N^2 = D$, alors $N\ D = D\ N$.

3. En déduire que, si $N^2 = D$, alors N est diagonale.
On pourra mettre l'égalité $N\ D = D\ N$ en équation.

4. Déterminer toutes les matrices diagonales N telles que $N^2 = D$.

5. En déduire la solution B de l'équation (1) dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles.

Partie III : Intervention d'un polynôme

1. Montrer qu'il existe un polynôme Q de degré deux, et un seul, que l'on calculera, tel que :

$$Q(0) = 0, \quad Q(1) = 1, \quad Q(4) = 2.$$

2. En déduire : $-\dfrac{1}{6}A^2 + \dfrac{7}{6}A = B$. (La matrice B a été définie en **II.5.**)

3. Montrer, pour toute matrice carrée F d'ordre trois :

$$A\ F = F\ A \Longleftrightarrow B\ F = F\ B.$$

Exercice 3 *Réduction d'une matrice carrée d'ordre 3..*
On considère la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

et on note ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à A dans la base canonique.

1. Donner l'expression de $\phi(x, y, z)$.

2. (a) Calculer la matrice $(A - I_3)^2 \times (A - 2I_3)$.

(b) Montrer que A admet 1 et 2 pour valeur propres, et que A n'admet aucune autre valeur propre.

(c) Calculer les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.
A est-elle diagonalisable ?

3. Soit v un vecteur propre associé de ϕ à la valeur propre 1.
Trouver un vecteur $w \in \mathbb{R}^3$ tel que $\phi(w) = v + w$.
On pourra choisir un vecteur v arbitrairement.

4. Soit u un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre 2.
Montrer que (u, v, w) forme une base de $\mathbb{R}^3$.
On pourra choisir un vecteur u arbitrairement.

5. Déterminer la matrice B associée à ϕ dans la base (u, v, w), puis une matrice inversible P telle que $A = PBP^{-1}$.

Exercice 4 *Fonction, suite et fonction de 2 variables.*
Dans cet exercice on pourra utiliser l'encadrement suivant : $2 < e < 3$.

Partie A : Etude d'une fonction
On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \varphi(x) = x^2e^x - 1$.

1. Dresser le tableau de variations de φ, en précisant la limite de φ en $-\infty$, sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$.

2. Etablir que l'équation $e^x = \dfrac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et que α appartient à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}; 1\right[$.

Partie B : Etude d'une suite
On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = x^3e^x$,
et la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 1$.

4. Etablir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

5. Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

Partie C : Etude d'une série

6. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{f(n)}$ converge. On note $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{f(n)}$.

7. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left| S - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(n)} \right| \leq \dfrac{1}{(e-1)e^n}$.

8. En déduire une fonction en Python qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Partie D : Etude d'une fonction de deux variables On considère l'ouvert $U =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$ et l'application de classe $\mathcal{C}^2$ suivante :

$$g = U \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto g(x, y) = \frac{1}{x} + e^x - y^2e^y$$

9. Représenter graphiquement l'ensemble U.

10. Calculer, pour tout (x, y) de U, les dérivées partielles premières de g en (x, y).

11. Montrer que g admet deux points critiques et deux seulement, et que ceux-ci sont $(\alpha, 0)$ et $(\alpha, -2)$, où α est le réel défini à la question 2.

12. Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha, 0)$?

13. Est-ce que g admet un extremum local en $(\alpha, -2)$?

14. Est-ce que g admet un extremum global sur U ?

Exercice 5 *Fonction de 2 variables, suite, série et intégrale.*

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $\forall t \in]0,+\infty[$, $f(t) = t + \dfrac{1}{t}$.

Partie A : Étude d'une fonction d'une variable

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$.
Dresser le tableau des variations de f en précisant les limites en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ vers $[2,+\infty[$.

On note $g : [2,+\infty[\to [1,+\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1,+\infty[$.

3. (a) Dresser le tableau de variations de g.

(b) Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2,+\infty[$.

(c) Soit $y \in [2,+\infty[$.
En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in]0,+\infty[$.
En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y.

Partie B : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction h de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $U =]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ (c'est-à-dire $x > 0$ et $y > 0$) définie par :

$$\forall (x,y) \in U,\ h(x,y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y).$$

4. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de h en tout $(x,y) \in U$.

5. Soit $(x,y) \in U$. Montrer :

$$(x,y) \text{ est un point critique de } h \quad \iff \quad \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}.$$

6. En déduire que h admet un unique point critique sur U (avec $x > 0$ et $y > 0$) dont on précisera les coordonnées (a,b).

7. (a) Vérifier :

$$\forall (x,y) \in U,\ h(x,y) = 2 + f(x) + f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right)$$

(b) En déduire que h admet en (a,b) un minimum global sur U.

Partie C : Étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} = \frac{1}{n} f(n u_n).$$

8. Montrer, que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$.

9. Créer une fonction Python qui prend en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, et qui renvoie la valeur de u_n.

10. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

(a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

(b) En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$.

(c) Calculer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} v_k$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, que l'on ne cherchera pas à déterminer.

11. (a) Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}dt$.

(b) Pour tous entiers n et p tels que $2 \leqslant p < n$, calculer $\sum\limits_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire :

$$0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}dt.$$

(c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_2 \leqslant u_n \leqslant 1 + u_2$.
Montrer alors que ℓ appartient à l'intervalle $[2;3]$.

(d) Montrer, pour tout entier p supérieur ou égal à 2 : $0 \leqslant \ell - u_p \leqslant \dfrac{1}{p-1}$

(e) En déduire une fonction Python qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.

Exercice 6 *Variable à densité, transfert et loi du maximum.*

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par : $f(t) = \dfrac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$.

Nous avons vu en classe que cette fonction est une densité, et que la variable aléatoire correspondante X vérifie $E(X) = 0$.

PARTIE A : Étude d'une autre variable aléatoire

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $\mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \ln(1+e^x)$.

5. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.

6. Montrer que, pour tout y de I, on a $\varphi^{-1}(y) = \ln(e^y - 1)$.
On pourra résoudre l'équation $\varphi(x) = y$ d'inconnue x.

On considère la variable aléatoire réelle Y définie par : $Y = \varphi(X)$.

7. Justifier : $\mathbf{P}(Y \leqslant 0) = 0$.

8. Déterminer la fonction de répartition de Y.

9. Reconnaître alors la loi de Y et donner, sans calcul, son espérance et sa variance.

10. À l'aide des questions précédentes, complétez la fonction Python suivante afin de réaliser n simulations de la variable aléatoire X

```
function X=f(n)
   Y = grand(1,n,'exp',1)
   X = ...
endfunction
```

PARTIE B : Loi du maximum, calcul d'une espérance

On considère deux variables aléatoires réelles X_1 et X_2 indépendantes et de densité f, où f a été définie dans la partie A. On définit ensuite la variable aléatoire $T = \max(X_1, X_2)$.

11. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition G de la variable aléatoire T est donnée par

$$G(x) = \left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)^2$$

et justifier que par ailleurs

$$G(x) = \left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)^2$$

12. En déduire que T est une variable à densité, et donner sa fonction de densité g.

13. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^x t\ g(t)dt = xG(x) - \int_0^x \left(\frac{e^t}{1+e^t}\right)^2 dt$$

14. (a) À l'aide du changement de variable $u = 1+e^t$, montrer que

$$\int_0^x \left(\frac{e^t}{1+e^t}\right)^2 dt = \int_2^{1+e^x} \frac{u-1}{u^2} du$$

(b) Conclure que

$$\int_0^x \left(\frac{e^t}{1+e^t}\right)^2 dt = \ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x} - \ln(2) - \frac{1}{2}$$

15. Déduire des questions précédentes que

$$\int_0^x t\ g(t)dt = -x\frac{2e^{-x}+e^{-2x}}{(1+e^{-x})^2} - \ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right) - \frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{2} + \ln(2)$$

16. Conclure que

$$\int_0^{+\infty} t\ g(t)dt = \frac{1}{2} + \ln(2)$$

17. On admet que $\displaystyle\int_{-\infty}^0 t\ g(t)dt = \frac{1}{2} - \ln(2)$.
En déduire que la variable aléatoire T admet une espérance et donner $E(T)$.

Exercice 7 *D'après HEC*. ***1.*** Soit a et b deux réels strictement positifs et A la matrice carré d'ordre 2 définie par : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que si a et b sont égaux, la matrice A n'est pas inversible.

(b) Calculer la matrice $A^2 - 2aA$.
En déduire que, si a et b sont distincts, la matrice A est inversible et donner la matrice A^{-1}.

(c) Montrer que les valeurs propres de A sont $a+b$ et $a-b$.

(d) On pose $\Delta = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice Q, carrée d'ordre 2 à coefficients réels, inversible et dont les éléments de la première ligne sont égaux à 1, vérifiant $A = Q\Delta Q^{-1}$.

(e) Calculer la matrice Q^{-1} et, à l'aide de la question précédente, calculer la matrice A^n pour tout entier naturel non nul n.

2. Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$ et q le réel $1-p$. On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre p.
On désigne par M la matrice carrée d'ordre 2 aléatoire suivante :

$$M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$$

et on note S (respectivement D) la plus grande (respectivement la plus petite) valeur propre de M et on définit ainsi deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

(a) Montrer que la probabilité de l'événement $[X = Y]$ est donnée par : $\mathbf{P}([X = Y]) = \dfrac{p}{2-p}$ et en déduire la probabilité de l'événement E : " la matrice M est inversible ".

(b) Calculer la covariance des variables aléatoires S et D.

(c) Calculer les probabilités $\mathbf{P}([S=2] \cap [D=0])$, $\mathbf{P}([S=2])$ et $\mathbf{P}([D=0])$.
Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?

(d) Établir, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $\mathbf{P}([S=n]) = (n-1)p^2q^{n-2}$.

(e) En déduire, lorsque p est égal à $\dfrac{2}{21}$, que la valeur la plus probable de la plus grande valeur propre des matrices M possibles est 11.
On admettra que $1 - \frac{1}{\ln\left(\frac{19}{21}\right)} \simeq 10,99$.