Vous pouvez travailler en groupe sur ce devoir

Exercice 1 *Une diagonalisation simultanée.*
On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -5 & -5 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la matrice A^3.

2. En déduire un polynôme annulateur de la matrice A, ainsi que les valeurs propres possibles de A.

3. Déterminer les valeurs propres de A, et les sous-espaces propres associés.

4. La matrice A est-elle diagonalisable ?
Si oui, déterminer une matrice P inversible, de deuxième ligne $(-1\ 1\ 1)$ telle que $A = PDP^{-1}$.

5. Vérifier que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Calculer la matrice $\Delta = P^{-1}BP$ puis en déduire que B est diagonalisable.

7. Écrire la matrice C comme combinaison linéaire de A et B.
En déduire que C est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

8. La matrice C est-elle inversible ?

Exercice 2 *Un espace vectoriel de matrices.*
On considère les trois matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note E l'ensemble des matrices carrées M d'ordre 2 telles que : $A\,M = M\,D$

1. Vérifier que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

2. Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
Montrer que M appartient à E si et seulement si : $z = 0$ et $y = t$

3. Etablir que (U, A) est une base de E, et donner la dimension de E.

4. Calculer le produit $U\,A$. Est-ce que $U\,A$ est élément de E ?

Exercice 3 *Une suite récurrente et sa série associée.*
On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{u_n + n + 1}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \frac{1}{n}$.

3. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$.

4. Déterminer la limite de $n \times u_n$

5. En déduire une équivalent simple de u_n puis la nature de la série $\sum u_n$.