Devoir Libre n°3

Exercice 1 . *Étude d'une suite.*
Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f(x) = x - \ln(x).$$

Partie A : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+*}$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.
3. Montrer : $b \in [2;4]$. On note $\ln(2) \approx 0,7$.

Partie B : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [b, +\infty[$.
2. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.
3. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b)$.
   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
4. (a) Écrire un script Python qui prend un entier n, et qui renvoie la valeur de u_n.
   (b) Ajuster le script précédent afin d'afficher une valeur approchée de b, à 10^{-2} près. *On pourra s'appuyer sur l'inégalité* $\frac{1}{2^{n-1}} \leq 10^{-2}$.

Exercice 2 . *Application linéaire et racine carrée d'une matrice.*
On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(x, y, z) = (x, x + 2y + z, 2x - 2y - z)$$

ainsi que les vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$u = (0, 1, -2),\ v = (0, 1, -1) \text{ et } w = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0\right)$$

Partie A : Réduction de l'endomorphisme f.

1. Donner la matrice canoniquement associée à f.
2. (a) Calculer le noyau de f et déterminer une base de $Ker(f)$.
   (b) Calculer l'image de f et déterminer une base de $Im(f)$.
3. Justifier que f n'est pas bijective.
4. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Calculer $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$.
6. Justifier que la matrice associée à f dans la base (u, v, w) est donnée par

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie B : Recherche des racines carrées de f.

Dans cette partie, on suppose qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$g \circ g = f$$

1. Montrer que $f \circ g = g \circ f$.
2. On note N la matrice associée à l'endomorphisme g dans la base (u, v, w).
   Justifier que $N \times T = T \times N$.
3. On note $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier que $b = c = d = g = h = 0$ et $e = i$.
   (b) En déduire la forme de la matrice N.
4. Résoudre l'équation $N^2 = T$.