Vous pouvez travailler en groupes sur ce devoir

Exercice *Une marche aléatoire.*
Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O.

Au départ, le mobile est à l'origine. Ensuite, il se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.

On note les variables aléatoires :
— X_n l'abscisse où se trouve la mobile à l'instant n (on a donc $X_0 = 0$).
— T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).

Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$.
Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $X_1 = 1$, $X_2 = 2$, $X_3 = 3$, $X_4 = 0$ et $T = 4$.

1. Donner la loi de X_1.

2. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(T = k)$ à l'aide des variables X_1, X_2 , ... , X_n.
(b) En déduire que $P(T = k) = p^{k-1}(1-p)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de T.
Rappeler l'espérance et la variance de T.

3. (a) Quel est le support de la variable aléatoire X_n ?
(b) En utilisant le système complet d'événements

$$(X_{n-1} = 0), (X_{n-1} = 1), (X_{n-1} = 2), \dots, (X_{n-1} = n-1)$$

montrer que $P(X_n = 0) = 1 - p$.

4. (a) Justifier que, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$(X_{n+1} = k) = (X_n = k-1) \cap (X_{n+1} = k)$$

et en déduire que $P(X_{n+1} = k) = pP(X_n = k-1)$.
(b) Montrer par récurrence sur n que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![0; n-1]\!], P(X_n = k) = p^k(1-p)$$

5. Donner $P(X_n = n)$ en justifiant son calcul.

6. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$. *On veillera à séparer $P(X_n = n)$ de la somme.*

7. On admet la formule, valable pour $x \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(1-x)\sum_{k=0}^{n-1} kx^{k-1} = \frac{1-x^n}{1-x} - nx^{n-1}$$

Utiliser cette formule pour montrer que $E(X_n) = \frac{p(1-p^n)}{1-p}$.

8. Compléter l'algorithme Python suivant afin de simuler n déplacements du mobile :

```
n=int(input('Entrez le nombre de déplacements n'))
p=float(input('Entrez la probabilité d'avancer p'))

X= ...

for ...
        r=random.random()
        if ...
                X= ...
        else
                X=...

        print(X)
```