

Feuille d'exercices 8 : Applications linéaires et matrices

Exercice 1. *Matrices associées à des applications linéaires.*

Pour chacune des applications linéaires suivantes, écrire la matrice associée relativement aux bases canoniques :

1. $f : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y - z \\ 2x + y - 3z \\ 3x + 2y - 4z \end{pmatrix}$
2. $g : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mapsto (2x_1 - 4x_3 + 5x_5, -x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_5)$
3. $h : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + y & x + z \\ 2x - y + z & y + z \end{pmatrix}$

On prendra la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans l'ordre suivant :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

4. $i : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$
 $P \mapsto P + P'$

Exercice 2. *Carré d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.*

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (x + y, x - y)$.

1. Déterminer la matrice M canoniquement associée à f .
2. Calculer M^2 .
3. En déduire l'expression de $f^2(x, y)$.

Exercice 3. *Matrice inverse et application réciproque.*

On considère $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique, et l'endomorphisme f définie par

$$f(x, y) = (2x - y, x + y)$$

1. Donner la matrice M associée à f dans la base canonique.
2. Calculer M^2 et l'exprimer comme combinaison linéaire de M et I_2 .
3. Justifier que M est inversible et calculer son inverse M^{-1} .
4. Justifier que f est un automorphisme et donner l'expression de $f^{-1}(x, y)$.

Exercice 4. *Matrice dans une base non-canonique, carré d'un endomorphisme.*

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$$

On considère également les vecteurs $u = (2, 4, -5)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (0, 1, -2)$.

1. Justifier que (u, v, w) forme une base de $\mathbb{R}^3$.
2. À l'aide de la matrice A , calculer $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$.
3. En déduire la matrice B de l'application f dans la base (u, v, w) .
4. Calculer B^2 , et en déduire f^2 .

Exercice 5. *Matrice dans une base non-canonique, puissances d'un endomorphisme.*

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

On considère également les vecteurs $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, 1, 0)$ et $w = (2, 0, 1)$.

1. Justifier que (u, v, w) forme une base de $\mathbb{R}^3$.
2. À l'aide de la matrice A , calculer $f(u)$, $f(v)$ et $f(w)$.
3. En déduire la matrice B de l'application f dans la base (u, v, w) .
4. Calculer B^n , et en déduire $f^n(u)$ pour un entier naturel n donné.

Exercice 6. *Endomorphisme sur un espace de polynômes.*

On considère l'application linéaire f définie par

$$f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$$

$$P \mapsto 2(X - 1)P' + P - X^2P''$$

1. Rappeler la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, et calculer les images de chacun de ses vecteurs par la fonction f .
2. En déduire la matrice canoniquement associée à l'application f .
3. À l'aide d'un produit de matrices, calculer l'image du polynôme $Q = 4X^3 - 6X^2 + 8X + 1$ par l'application f .

Feuille d'exercices 8 : Applications linéaires et matrices

Exercice 7. *Endomorphisme sur un espace de polynômes, d'après EDHEC 2011.*

On note $\mathbb{R}_2[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, et on note

$$P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X^2$$

sa base canonique.

1. Justifier que pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a $2XP - (X^2 - 1)P' \in \mathbb{R}_2[X]$.
2. Justifier que l'application

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & 2XP - (X^2 - 1)P' \end{array}$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. En écrivant $P = aX^2 + bX + c$, expliciter $f(P)$.
4. Déterminer la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme f .
5. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ ainsi que leurs dimensions.
6. L'endomorphisme f est-il un automorphisme?

Exercice 8. *Endomorphisme sur un espace de matrices.*

On considère l'application linéaire

$$\begin{array}{ccc} f: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times M - M \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

On note également

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice M canoniquement associée à f .
2. Démontrer que (A, B, C, D) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Donner la matrice associée à f dans la base (A, B, C, D) .
4. Déterminer le noyau et l'image de f . On en donnera une base et la dimension.

Exercice 9. *D'après EMLyon 2017.*

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de E . On note, pour tout polynôme P de E :

$$a(P) = P - XP' \text{ et } b(P) = P - P'$$

1. Justifier que a est un endomorphisme de E et déterminer $\text{Ker}(a)$ et $\text{Im}(a)$.
2. Justifier que b est un automorphisme de E et justifier que $b^{-1}(Q) = Q + Q' + Q''$.

Exercice 10. *D'après EMLyon 2016.*

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

On note également $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 .
2. Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre.
3. Montrer que $A^3 = 2A$.
4. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et que la famille (I, A, A^2) est une base de $\mathcal{E}$.
En déduire la dimension de $\mathcal{E}$.
5. On considère l'application f qui à une matrice M associe la matrice $A \times M$.
Justifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.
6. Donner la matrice associée à f dans la base (I, A, A^2) .
7. Justifier que $f \circ f \circ f = 2f$.
8. L'endomorphisme f est-il bijectif?