

Feuille d'exercices 9 : Comparaison de fonctions et développements limités.

Exercice 1. Comparaisons.

Comparer les expressions suivantes au voisinage du point indiqué :

1. $\sqrt{x}$ et $\ln(x)$ au voisinage de 0.
2. $x^4 - x^2 + \frac{2}{x}$ et e^x au voisinage de $+\infty$.
3. x et $\ln(x^2 + x)$ au voisinage de $+\infty$.
4. $e^{-\frac{1}{x^2}}$ et x^3 au voisinage de 0.
5. $\ln(x) \ln(1+x)$ et $\ln(x^2) \ln(x + e^{\frac{1}{x}})$ au voisinage de $+\infty$.
6. x^3 et 3^x au voisinage de $+\infty$.

Exercice 2. Calcul de limites à l'aide d'équivalents.

Calculer les limites suivantes à l'aide d'équivalents :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x^2 - 5}{x^3 - 2x + 1}$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x^2 - 5}{x^3 - 2x + 1}$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{12x^2 - 5}{x^3 - 2x + 1}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^2}{x \ln(1+x)}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{2x}$

Exercice 3. Développements limités en 0.

Donner les développements à l'ordre 2 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -x + \ln(1+x)$
2. $g(x) = \frac{e^x - x - 1}{x}$
3. $h(x) = e^x \ln(1+x)$
4. $i(x) = e^x + \ln(1+x)$
5. $j(x) = \ln(1+x+x^2)$
6. $h(x) = \frac{e^x}{x+1}$
7. $k(x) = x\sqrt{1+x}$
8. $l(x) = e^{e^x}$

Exercice 4. Développements limités en un point non nul.

Donner les développements à l'ordre 2 des fonctions suivantes au point indiqué :

1. $f(x) = e^{1-x} + 2\ln(x)$ au voisinage de $x = 1$.
2. $h(x) = 3^x$ au voisinage de $x = 1$.
3. $i(x) = e^{x^2-1}$ au voisinage de $x = 2$.

Exercice 5. Dérivabilité et développement limité.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, et calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.
3. Justifier que la fonction f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
4. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
5. Donner le développement limité à l'ordre 1 de la fonction f en 0.

Exercice 6. Développement limité et tangente.

On considère la fonction g définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$g(x) = x - \ln(1+x)$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et donner le développement limité à l'ordre 2 en 0.
2. Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
3. Étudier la position de la courbe de f vis-à-vis de cette tangente au voisinage de 0.
4. Étudier les variations de g et donner le signe de $g(x)$ sur $] -1; +\infty[$.

Exercice 7. Développement limité et tangente, un peu plus difficile.

On considère la fonction h définie sur $] -1; 0[\cup]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

1. Justifier que h est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son domaine de définition.
2. Calculer un développement limité de la fonction h au voisinage de 0.
3. Montrer que la fonction h peut être prolongée par continuité en 0. On notera toujours h ce prolongement, et on précisera la valeur de $h(0)$.
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de h en 0, et étudier la position de la courbe de h par rapport à cette tangente au voisinage de 0.

Feuille d'exercices 9 : Comparaison de fonctions et développements limités.

Exercice 8. *D'après ECRICOME 2014.*

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = e \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Déterminer le signe de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$. En déduire que, pour tout entier naturel n , u_n existe.
2. Écrire un programme en Python qui, pour une valeur N fournie par l'utilisateur, calcule et affiche u_N .
3. Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
4. Établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.
5. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de

$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

puis déterminer un équivalent de $f'(x)$ lorsque x tend vers 0.

6. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$.
7. Établir que :

$$\forall x \geq e-1, \quad f(x) \leq x \quad \text{et} \quad (x+1) \ln(x+1) \geq (x+1)$$

En déduire que :

$$\forall x \geq e-1, \quad f'(x) \geq 0$$

8. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e-1 \leq u_n$$

9. Établir que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et préciser la valeur de sa limite L .

Exercice 9. *D'après EDHEC 2009.*

Dans cet exercice, on considère la fonction f définie par $f(0) = 1$, et pour tout x non nul de $] -\infty; 1[$,

$$f(x) = \frac{-x}{(1-x) \ln(1-x)}$$

1. Montrer que f est continue sur $] -\infty; 1[$.
2. (a) Déterminer le développement limité de $\ln(1-x)$ à l'ordre 2 lorsque x est au voisinage de 0.
(b) En déduire que f est dérivable en 0, puis vérifier que $f'(0) = \frac{1}{2}$.
3. (a) Montrer que f est dérivable sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; 1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout réel x élément de $] -\infty; 0[\cup]0; 1[$.
(b) Déterminer le signe de la quantité $\ln(1-x) + x$ lorsque x appartient à $] -\infty; 1[$, puis en déduire les variations de f .
(c) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition, puis dresser son tableau de variation.
4. (a) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un seul réel de $[0; 1[$, noté u_n , tel que $f(u_n) = n$ et donner la valeur de u_1 .
(b) Montrer que la suite (u_n) converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Exercice 10. *Des rappels d'analyse.*

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\varphi(x) = \begin{cases} 1 - x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ en $+\infty$.
2. Montrer que la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer sa fonction dérivée.
4. Montrer que φ est dérivable en 0 par deux méthodes :
(a) En calculant $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0}$.
(b) En calculant $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x)$.

Chaque approche doit être justifiée en détail.

5. Donner l'allure de la courbe de φ au voisinage du point d'abscisse 0.