Feuille d'exercices 11 : Intégration.

Exercice 1.
Étudier la convergence des intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} e^t dt$
2. $\int_{-\infty}^{0} e^t dt$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^t dt$
4. $\int_{-\infty}^{1} e^{2t} dt$
5. $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$
6. $\int_{-\infty}^{0} e^{-t} dt$
7. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t} dt$
8. $\int_1^{+\infty} e^{-2t} dt$
9. $\int_0^{+\infty} t dt$
10. $\int_1^{+\infty} 2 dt$
11. $\int_1^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$
12. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$
13. $\int_2^{+\infty} \ln(t) dt$
14. $\int_2^{+\infty} t\ln(t) dt$
15. $\int_2^{+\infty} te^{t^2} dt$
16. $\int_2^{+\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Exercice 2.
Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\mathrm{A} = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx \quad \mathrm{B} = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^3} dt$$
$$\mathrm{C} = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t} dt \quad \mathrm{D} = \int_3^{+\infty} \frac{du}{u \ln u}$$

Exercice 3.
À l'aide d'intégrations par parties, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t^2} dt$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 4.

1. Montrer que $\forall t \geq 1, \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$.

2. En déduire la convergence, et la valeur de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t)}$.

Exercice 5.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

1. Étudier la parité de f.

2. Donner une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

3. Justifier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$ et donner sa valeur.

4. En déduire la convergence, et la valeur de $\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$.

5. Conclure quant à la convergence et la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$.

Exercice 6.

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^X \frac{xe^x}{(1+e^x)^2} dx = -\frac{X}{1+e^X} + \int_0^X \frac{1}{1+e^x} dx$$

2. Justifier que $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$, puis en déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{(1+e^x)^2} dx = \ln(2)$.

3. En déduire la convergence et la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^x}{(1+e^x)^2} dx$.

Exercice 7. *Suite d'intégrales impropres.*
On considère la fonction f définie pour $x > 0$ par

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

et, pour tout entier $n \geq 1$,

$$I_n = \int_n^{+\infty} f(x) dx$$

1. Montrer que l'intégrale I_n converge, et exprimer I_n en fonction de n.

2. Montrer que $I_n \sim \frac{1}{n}$.

3. Montrer que la série

$$\sum_{n \geq 1} f(n)$$

est convergente.

Exercice 8. *Convergence d'intégrales impropres par critères de comparaison.*
Étudier la convergence des intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}}dt$
2. $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$
3. $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x^2}dx$ avec $k\in\mathbb{N}$
4. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$
5. $\int_0^{+\infty} t^3e^{-t}dt$
6. $\int_0^2 \frac{1-e^t}{t}dt$

Exercice 9. *Intégrale avec deux bornes variables.*
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\int_x^{2x} e^{-t^2}\,dt$

1. Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que la fonction g est impaire.
2. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et que pour tout $x\in\mathbb{R}, g'(x)=2e^{-4x^2}-e^{-x^2}$.
3. Dresser le tableau de variations de g. On précisera g(0).
4. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
5. Montrer que pour tout $x>0$,
$$xe^{-4x^2}\le g(x)\le xe^{-x^2}$$
En déduire la limite de la fonction g en$+\infty$.

Exercice 10. *D'après ECRICOME 2016.*
Soit n un entier naturel. On considère l'intégrale impropre
$$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}dx$$

1. Montrer que $\frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}=o_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right)$.
2. Justifier la convergence de l'intégrale I_n.
3. Calculer l'intégrale I_0.
4. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_{n+1}=(n+1)I_n$.
5. En déduire que
$$\forall n\in\mathbb{N}, I_n=n!$$

Exercice 11. *D'après EDHEC 2004.*
Le but de cet exercice est de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}dt$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_n=\int_0^1\frac{1}{1+t+t^n}dt$ et on a, en particulier, $u_0=\int_0^1\frac{1}{2+t}dt$

1. Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier lexistence de u_n.
2. Calculer u_0 et u_1.
3. (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (b) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\le\ln(2)$
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, écrire $\ln(2)-u_n$ sous la forme d'une intégrale.
   (b) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\ln(2)-u_n\le\dfrac{1}{n+1}$
   (c) Donner la limite de la suite (u_n)
5. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $v_n=\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}dt$.
   (a) Justifier la convergence de l'intégrale définissant v_n.
   (b) Montrer que : $\forall n\ge 2,\ 0\le v_n\le\dfrac{1}{n-1}$
   (c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$, puis donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}dt$.