Feuille d'exercices 12 : Fonctions de 2 variables

Exercice 1. *Calcul de dérivées partielles d'ordre 1.*
Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition, et calculer les dérivées partielles d'ordre 1.

1. $f(x,y) = \frac{x^3y+y^2x}{x-y}$
2. $g(x,y) = \ln\left(1+\frac{x}{y}\right)$
3. $h(x,y) = 5x^2 - 6xy + 2x + 2y^2 - 2y + 1$
4. $i(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$

Exercice 2. *Minimum et point critique.*
On considère la fonction définie par

$$f(x,y) = 4x^2 + y^2 + 8x$$

1. Calculer $f(-1,0)$.
2. Factoriser $f(x,y)+4$ et déterminer son signe.
3. En déduire un minimum de la fonction f. Est-il global ?
4. (a) Calculer les dérivées partielles de f.
   (b) Déterminer les points critiques de f. Commenter.

Exercice 3. *Calcul de dérivées partielles d'ordre 2.*
Justifier que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur le domaine indiqué, et calculer leurs dérivées partielles d'ordre 2.

1. $f(x,y) = \ln(xy) + 4xy^2 + \frac{x^2}{2}$ sur $D_f = (\mathbb{R}^*)^2$
2. $g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ sur $D_g = \mathbb{R}^2$
3. $h(x,y) = xye^{x^2y}$ sur $D_h = (\mathbb{R}^*)^2$
4. $i(x,y) = \sqrt{xy^2+1}$ sur $D_i = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

Exercice 4. *Point critique et minimum.*
Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 5x^2 - 6xy + 2x + 2y^2 - 2y + 1$

1. Calculer les dérivées partielles de f.
2. Déterminer le point critique de f et prouver que f atteint un minimum en ce point.

Exercice 5. *Recherche d'extremums locaux.*
Soit la fonction f définie par $f(x,y) = x\left[(\ln(x))^2 + y^2\right]$.
Déterminer le domaine de définition de f puis ses extremums locaux.

Exercice 6. *Extremums locaux et suite, d'après EMLyon 2006.*
On note $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$F(x,y) = (x-1)(y-2)(x+y-6)$$

1. (a) Montrer que $(4,2)$ et $(2,3)$ sont des points critiques de F.
   (b) Est-ce que F présente un extremum local au point $(4,2)$?
   (c) Est-ce que F présente un extremum local au point $(2,3)$?
2. On note $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$\varphi(x) = x(x-2)(2x-5)$$

   (a) Montrer : $\forall x \in [4;+\infty[, \quad (x-2)(2x-5) \geq 4$
   (b) En déduire : $\forall x \in [4;+\infty[, \quad \varphi(x) \geq 4x$ et $\varphi(x) \in [4,+\infty.[$
3. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = F(1+u_n, u_n)$$

   (a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n à l'aide de la fonction φ.
   (b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_n \geq 4^{n+1}$
   Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$?
   (c) Écrire un programme en Python qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^{10}$

Exercice 7. *Recherche d'extremums locaux (calculatoire !).*
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = xye^{-(x^2+y^2)}$.

1. Calculer $\partial_1(f)$ et $\partial_2(f)$.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Indiquer si ces points correspondent à un minimum ou un maximum.

Exercice 8. *Équation et extremums locaux, d'après EMLyon 2007.*
Pour tout $x > 0$, on pose $g(x) = x^2 + ln(x)$.

1. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0, +\infty[$, et que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.
2. On considère l'application

$$F : \begin{pmatrix} \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & xe^y + y\ln(x) \end{pmatrix}$$

   (a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ et calculer les dérivées partielles premières de F en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.

   (b) Montrer que F admet un point critique et un seul que l'on exprimera à l'aide du nombre réel α.

   (c) Est-ce que F admet un extremum local ?

Exercice 9. *Extremum global, d'après ECRICOME 2007.*
On considère, sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, la fonction g définie par :

$$g(x, y) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})(1 + x)(1 + y)$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de g sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que g admet un extremum local sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ dont on précisera la nature.
3. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ définie par $f(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$.

   (a) Montrer que pour tout $t > 0$ on a $f(t) \geq 1$.

   (b) Vérifier que :
   $$g(x, y) = 1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1\left(\frac{x}{y}\right)$$

   (c) En déduire que l'extremum local est un extremum global de g sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 10. *Fonctions de deux variables et probabilités, d'après EMLyon 2004.*
Une urne contient des boules blanches, des boules rouges et des boules vertes.

— La proportion de boules blanches est b.
— La proportion de boules rouges est r.
— La proportion de boules vertes est v.

Ainsi, on a. : $0 < b < 1, \quad 0 < r < 1, \quad 0 < v < 1 \quad$ avec $\quad b + r + v = 1$.

On effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête au premier changement de couleur.

Pour tout entier naturel i supérieur ou égal à 1, on note B_i (respectivement R_i ; V_i) l'événement " la i-ème boule tirée est blanche (respectivement, rouge ; verte)"

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

Par exemple, lorsque le résultat des tirages est V_1, V_2, B_3, la variable aléatoire X prend la valeur 3.

Partie A

1. Préciser les valeurs possibles de X.
2. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, \quad P(X = k) = (1 - b)\, b^{k-1} + (1 - r)\, r^{k-1} + (1 - v)\, v^{k-1}$
3. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que :

$$E(X) = \frac{1}{1 - b} + \frac{1}{1 - r} + \frac{1}{1 - v} - 2$$

Partie B

On considère la fonction f de classe C^2 sur $]0, 1[\times]0, 1[$ définie par :

$$\forall (x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[, \; f(x, y) = \frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 - y} + \frac{1}{x + y}$$

1. Calculer, pour tout $(x, y) \in]0, 1[\times]0, 1[$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.
2. Montrer qu'il existe un unique point I de $]0, 1[\times]0, 1[$ en lequel f est susceptible de posséder un extremum local et déterminer I.
3. Montrer que f admet en I un minimum local.
4. (a) Exprimer $E(X)$ en fonction de $f(b, r)$.

   (b) Que peut-on dire de $E(X)$ lorsque $b = r = v = \dfrac{1}{3}$?