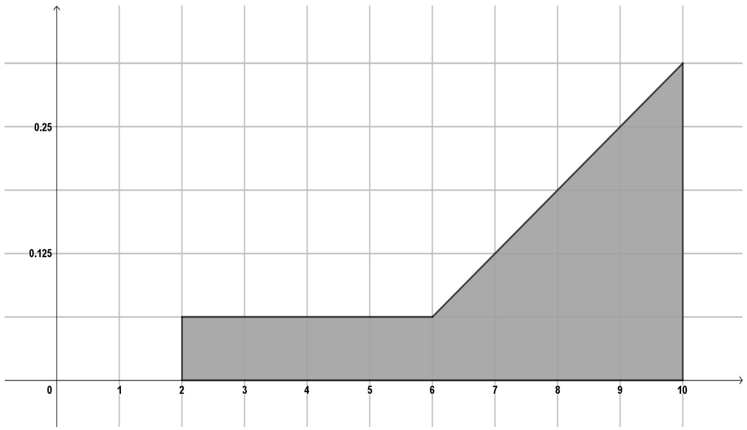
Feuille d'exercices 13 : Variables aléatoires à densité (1^e Partie)

Exercice 1.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \in [-1;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire X.
2. Représenter la fonction f à main levée.
3. Calculer $P(X \leq 0)$, $P(0 \leq X \leq 1)$ et $P(X > 1)$
4. Identifier ces probabilités sur le graphique précédent.
5. Calculer la fonction de répartition de X, et représentez-la à main levée.
6. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 2.
On considère la variable aléatoire continue X de densité f, représentée ci-dessous.



1. Vérifier que f est une loi de densité.
2. Calculer $P(4 < X < 8)$ et $P_{(X>4)}(6 < X < 10)$

Exercice 3.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire X.
2. Calculer $P(2 \leq X \leq 3)$ et $P(X \geq 4)$.
3. Calculer la fonction de répartition de X.
4. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 4.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire X.
2. Calculer la fonction de répartition de X.
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4. On pose $Y = 2X + 1$. Calculer une densité et, si possible, l'espérance de Y.
5. Calculer les variances des variables aléatoires X et Y.

Exercice 5. *D'après EMLyon.*
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & \text{si } -\ln(2) \leq x \leq \ln(2) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire X.
2. Calculer la fonction de répartition de X.
3. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 6. *Calcul d'une espérance (plus difficile).*
On considère la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} ate^{-2t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$, où a est un réel.

1. Déterminer le réel a pour que f soit une densité de probabilités.
2. En acceptant la valeur de a trouvée,
   (a) Calculer l'espérance de la variable aléatoire obtenue.
   (b) Calculer la variance de la variable aléatoire obtenue.

Exercice 7. *Calcul d'une espérance et d'une variance.*
On dit qu'une variable réelle X suit une *loi de Laplace* si sa densité est de la forme

$$f(t) = Ce^{-|t|}$$

pour un certain nombre réel C.

1. Pour quel nombre C est-ce que la fonction f définit une densité de probabilités ?
   On admet que C prend désormais la valeur trouvée.
2. Calculer la fonction de répartition de X.
3. Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$.
4. Montrer que X admet une variance et calculer $V(X)$.

Exercice 8. *D'après ECRICOME 2020.*

1. Soit a un nombre réel strictement positif. On pose :
$$I_n(a) = \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt$$
   Montrer que l'intégrale $I_n(a)$ converge et vaut $\frac{1}{(n-1)a^{n-1}}$.
2. Soit f la fonction définie par :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ \frac{3a^3}{t^4} & \text{si } t \geq a \end{cases}$$
   (a) Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire X.
   (b) Démontrer que X admet une espérance et calculer cette espérance.
   (c) Démontrer que X admet une variance, et que celle-ci vaut $\frac{3a^2}{4}$.

Exercice 9. *D'après ECRICOME 2019.*
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^3} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } -1 < t < 1 \\ -\dfrac{1}{t^3} & \text{si } t \leq -1 \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est paire.
2. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et calculer sa valeur.
3. (a) À l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel A strictement supérieur à 1, on a : $\displaystyle\int_{-A}^{-1} f(t)\,dt = \int_1^A f(u)\,du$.
   En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,dt$ converge et donner sa valeur.
   (b) Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.
4. On considère une variable aléatoire X admettant f pour densité.
   (a) On note F_X la fonction de répartition de X. Montrer que, pour tout réel x, on a :
$$F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
   (b) Démontrer que X admet une espérance, puis que cette espérance est nulle.
   (c) La variable aléatoire X admet-elle une variance ?