Feuille d'exercices 14 : Variables aléatoires à densité (2^e partie)

Exercice 1. *Loi uniforme.*
Un étang de pêche est très régulièrement empoissonné. Lorsqu'un pêcheur met sa ligne à l'eau le temps d'attente T (en minutes) avant la première touche suit une loi uniforme sur l'intervalle [0 ;15].

1. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit inférieur à 10 minutes ?
2. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit supérieur à 30 secondes ?
3. Quel est le temps d'attente moyen ?
4. Le pêcheur a attendu 10 minutes, et commence à s'impatienter.
   Quelle est la probabilité que ça morde dans la minute qui suit ?

Exercice 2. *Transfert d'une loi uniforme.*
Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme $U([0,1])$. On définit la variable aléatoire $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-X)$ où $\lambda > 0$.

1. Calculer $P(Y \leq x)$ en fonction du nombre réel x.
2. En déduire la densité de Y, puis reconnaître la loi de Y.

Exercice 3. *Transfert d'une loi à densité.*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire X.
2. On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire.
   Calculer $P(Y \leq x)$, et en déduire la loi de Y.

Exercice 4. *Lois uniformes.*
Question préliminaire : Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire Y suivant la loi uniforme sur $[0;1]$.

Trois personnes ont convenu de se retrouver à la gare pour emprunter le même train de banlieue. L'origine des temps est prise à 17h et l'unité de temps est l'heure. Pour $k \in \{1,2,3\}$, on désigne par Y_k l'heure d'arrivée de la personne numéro k.

On suppose que les trois variables Y_k sont indépendantes et suivent la loi uniforme sur $[0;1]$, ce qui signifie que les trois personnes arrivent au hasard entre 17 h et 18 h.

1. On note X la variable aléatoire représentant l'heure d'arrivée de la dernière personne (qui n'est pas forcément la personne numéro 3 !).
   (a) Soit $t \in [0;1]$. Exprimer l'événement $(X \leq t)$ en fonction des événements $(Y_1 \leq t)$, $(Y_2 \leq t)$, $(Y_3 \leq t)$.
   (b) En déduire la fonction de répartition de X, que l'on notera G.
   (c) Déterminer une densité de X et l'espérance de X.
2. Les personnes peuvent emprunter trois trains à 17h20, 17h40 et 18h (ce qui correspond, dans le repère de temps choisi, aux instants 1/3, 2/3 et 1).
   Pour $j \in \{1,2,3\}$ on appelle E_j l'événement :

   "les trois personnes prennent le j-ième train ".

   Exprimer l'événement E_j à l'aide de la variable aléatoire X puis calculer sa probabilité.
3. On désigne par A l'événement : " La première personne arrivée attend moins de 20 minutes avant de monter dans le train avec ses amis".
   (a) Exprimer les événements

   $$A \cap E_1, A \cap E_2, A \cap E_3$$

   en fonction des variables Y_1, Y_2 et Y_3.
   (b) Déterminer alors la probabilité de A.

Feuille d'exercices 14 : Variables aléatoires à densité (2^e partie)

Exercice 5. *Loi exponentielle.*
La durée de vie (en années) d'un appareil électronique est modélisé par une loi exponentielle de paramètre 0,2.

1. Quelle est la durée de vie moyenne de cet appareil ?
2. Quelle est la probabilité que la durée de vie n'excède pas 7 ans ?
3. Quelle est la probabilité qu'elle dépasse 7 ans ?
4. Quelle est la probabilité que la durée de vie de l'appareil soit comprise entre 4 et 7 ans ?
5. L'appareil fonctionne toujours au bout de 4 ans.
   (a) Quelle est la probabilité que sa durée de vie soit inférieure à 7 ans ?
   (b) Quelle est la probabilité que l'appareil lâche dans l'année suivante ?

Exercice 6. *Minimum de deux lois exponentielles.*
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. On note $T = \min(X, Y)$. Déterminer la loi de T, son espérance et sa variance.

Exercice 7. *Propriétés de la loi exponentielle, D'après EMLyon 2015.*
On désigne par λ un réel strictement positif.

1. Justifier la convergence des intégrales suivantes, et donner leurs valeurs :
$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dt, \quad I_2 = \int_0^{+\infty} te^{-\lambda t}\,dt, \quad I_3 = \int_0^{+\infty} t^2e^{-\lambda t}\,dt$$
2. En déduire l'espérance et la variance d'une loi exponentielle de paramètre λ.
3. (a) Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur [0,1].
   Rappeler la fonction de répartition de U.
   (b) On pose $V = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$.
   Calculer la probabilité $P(V \leq x)$ en utilisant la question précédente.
   (c) En déduire la densité de V. Quelle est la loi suivie par V ?
4. Que fait la commande Scilab suivante : - 1 / 2 * log(1 – rand()) ?
   On rappelle que rand() tire un nombre aléatoirement dans [0,1]

Exercice 8. *Durée de vie et lois exponentielles.*
Le fonctionnement d'une machine est perturbé par des pannes. On considère les v.a. X_1, X_2 et X_3, définies de la manière suivante :
— X_1 est la durée de fonctionnement de la machine entre sa mise en marche et la première panne.
— X_2 est la durée de fonctionnement entre la première panne et la deuxième panne.
— X_3 est la durée de fonctionnement entre la deuxième panne et la troisième panne.
Après la troisième panne, l'utilisation de la machine est suspendue. On suppose que les v.a. X_1, X_2 et X_3 suivent une loi $\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$, et qu'elles prennent leurs valeurs de façon indépendante.

1. Quelle est la durée moyenne de fonctionnement entre deux pannes consécutives ?
2. Soit l'événement

   E : « Chacune des 3 périodes de fonctionnement dure plus de 2 heures ».

   Calculer P(E).
3. Soit Y la v.a. égale à la plus grande des 3 durées de fonctionnement de la machine.
   (a) Déterminer la fonction de répartition de Y.
   (b) En déduire une densité de Y.
4. Soit $a \neq 0$.
   (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $\int_0^x te^{at}dt$.
   (b) En déduire que la v.a. Y admet une espérance, la calculer, puis l'exprimer en heures et minutes