Feuille d'exercices 15 : Variables aléatoires à densité (3^e partie)

Exercice 1. *Loi normale : calcul de probabilités.*

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Déterminer les probabilités suivantes :

1. $P(X \leq 1,4)$	4. $P(X \geq 1,39)$
2. $P(X \geq 0,3)$	5. $P(0,21 \leq X \leq 1,24)$
3. $P(X \leq 1,26)$	6. $P(1,36 \leq X \leq 1,47)$

Exercice 2. *Loi normale : calcul de probabilités (plus difficile).*

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, et Φ sa fonction de répartition.

1. Déterminer $P(X > x)$ en fonction de x à l'aide Φ .
2. Déterminer $\Phi(-x)$ en fonction de $P(X > x)$ (on pensera à utiliser les propriétés de la densité de X).
3. En déduire l'expression de $\Phi(-x)$ en fonction de $\Phi(x)$.
4. En déduire les probabilités suivantes :

(a) $P(X \leq -1)$	(e) $P(-0,14 \leq X \leq 1,65)$
(b) $P(X > -0,7)$	(f) $P(-1,36 < X \leq 1,76)$
(c) $P(X \leq -1,94)$	(g) $P(-2 < X < -1,34)$
(d) $P(X > -1,27)$	

Exercice 3. *Loi normale : recherche des paramètres.*

Déterminer les paramètres des lois normales à partir des propriétés suivantes.

1. X suit une loi normale centrée, et $P(X \leq 8) = 0,8340$.
2. X suit une loi normale, $E(X) = 4$ et $P(X < -5) = 0,3015$.
3. X suit une loi normale, $V(X) = 4$ et $P(X \leq 4) = 0,9591$.

Exercice 4. *Loi normale : recherche des paramètres.*

On suppose que la distance en mètres parcourue par un javelot suit une loi normale. Au cours d'un entraînement, on constate que :

- 10% des javelots atteignent plus de 75 mètres.
- 25% des javelots parcourent moins de 50 mètres.

Calculer la longueur moyenne parcourue par un javelot ainsi que l'écart-type de cette longueur.

Exercice 5. *Application de la loi normale.*

Une entreprise fabrique des billes dont le diamètre D (exprimé en millimètres) suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, où $\mu = 8$ et $\sigma^2 = 0,16$.

1. Calculer les probabilités suivantes. $P(D < 7,5)$, $P(D > 8,5)$, $P(7,5 < D < 8,5)$.
2. Chaque bille est vérifiée à l'aide de deux calibres, l'un de 7,5 mm et l'autre de 8,5 mm. Elle est acceptée si elle passe dans le grand et non dans le petit.
 - (a) Déterminer la probabilité qu'une bille soit refusée.
 - (b) Déterminer la probabilité qu'une bille soit acceptée sachant qu'elle passe dans le grand calibre.

Exercice 6. *D'après EDHEC 2019.*

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$. On a donc, en particulier, $u_0 = 1$.

1. Déterminer u_1 et u_2 .
2. (a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
(b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. On se propose dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n) .
 - (a) Rappeler la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt$, où σ est un réel strictement positif.
 - (b) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2} dt$, puis celle de $\int_0^{+\infty} e^{-nt^2} dt$.
 - (c) Montrer que, pour tout réel t , on a : $e^{-t^2} \geq 1 - t^2$.
 - (d) En déduire que : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$, puis donner la limite de la suite (u_n) .
4. Calculer $\int_0^1 (1-t)^n dt$, puis montre que $u_n \geq \frac{1}{n+1}$. Que peut-on déduire en ce qui concerne la série de terme général u_n ?
5. (a) Établir, grâce à une intégration par parties, que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} = (2n+2)(u_n - u_{n+1})$$
 (b) En déduire l'égalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$$
 (c) On admet l'équivalent $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$. En écrivant $u_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)(2n)!}$, montrer que :

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$