Feuille d'exercices 16 : Suites de variables aléatoires.

Exercice 1. *Tirages dans deux urnes avec changement d'urne.*
Deux urnes U_1 et U_2 contiennent chacune des boules blanches et des boules noires.
— U_1 contient 2 boules blanches et 2 boules noires
— U_2 contient 1 boule blanche et 3 boules noires
On effectue une suite de tirages avec remise de la boule tirée en procédant comme suit :
Le premier tirage s'effectue dans U_1.
- Si au n-ième tirage on obtient une boule blanche alors le (n + 1)-ième tirage s'effectue dans U_1.
- Si au n-ième tirage on obtient une boule noire alors le (n + 1)-ième tirage s'effectue dans U_2.

On désigne par :
— p_n la probabilité d'obtenir une boule blanche au n-ième tirage
— X_n la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule obtenue au n-ième tirage est blanche, 0 sinon.
— S_n est le nombre total de boules blanches obtenues au bout de n tirages.

1. Calculer p_1 et p_2.

2. Déterminer une relation entre p_{n+1} et p_n.

3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a

$$p_n = \frac{1}{3}\left(1 + 8\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

En déduire la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

4. Pour n supérieur ou égal à 1, donner la loi de X_n. Préciser $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

5. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

6. Exprimer S_n en fonction des X_k, $1 \leq k \leq n$; En déduire $E(S_n)$.

Exercice 2. *Tirages dans une urne, d'après EMLyon 2013.*
On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, et dans laquelle on effectue k tirages avec remise.

Pour tout entier $i \in [[1;n]]$ on note X_i le nombre d'obtentions de la boule numérotée i au cours des k tirages.

1. Donner la loi de X_i. Rappeler son espérance et sa variance.

2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n$ sont-elles indépendantes ?

3. Soient i et j tels que $i \neq j$.

(a) Déterminer la loi de $X_i + X_j$. Rappeler sa variance.

(b) En déduire la covariance du couple (X_i, X_j).

Exercice 3. *Somme de variables aléatoires dépendantes, d'après HEC 2018.*
On considère des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suivant chacune la même loi de Bernoulli de paramètre p avec $0 < p < 1$, c'est à dire :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ P([X_k = 1]) = p \text{ et } P([X_k = 0]) = 1 - p$$

On suppose que pour tout couple $(k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $k \neq \ell$, le coefficient de corrélation linéaire des variables X_k et X_ℓ est le même ; on note r ce coefficient. On a donc :

$$\forall (k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2, \qquad \frac{Cov(X_k, X_\ell)}{\sqrt{V(X_k)V(X_\ell)}} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell \\ r & \text{si } k \neq \ell \end{cases}$$

1. Dans les cas (a) et (b) suivants, calculer la valeur de r et exprimer la variance de la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{n} X_k$ en fonction de n et p.

(a) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

(b) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont toutes égales.

De plus, préciser la loi de $\sum_{k=1}^{n} X_k$ dans chacun des deux cas précédents.

2. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la variance de la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{k} X_i$ est donnée par la formule :

$$V\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = kp(1 - p)(1 + (k - 1)r)$$

3. En déduire que le coefficient r est au moins égal à $-\dfrac{1}{n-1}$.