Feuille d'exercices 17 : Convergence de variables aléatoires

Exercice 1. *Estimation d'occurrences aléatoires.*

1. On lance 10000 fois une pièce équilibrée. Majorer la probabilité d'obtenir au moins 7500 fois "pile".
2. On jette 3600 fois un dé équilibré. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 580 et 620.

Exercice 2. *Encadrement des fréquences d'apparition d'un coté d'une pièce.*
On considère une pièce équilibrée. On souhaite calculer le nombre de lancers qu'il faut faire pour affirmer, avec une certitude d'au moins 95%, que la fréquence d'apparition de "pile" soit entre 40% et 60%.

1. On effectue n lancers de la pièce, et on note X_n le nombre de "pile" obtenus. Rappeler la loi, l'espérance et la variance de X_n.
2. On note $\overline{X_n}$ la fréquence d'apparition de "pile" au cours des n lancers.
   (a) Exprimer $\overline{X_n}$ en fonction de X_n et de n.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de $\overline{X_n}$.
3. (a) Exprimer l'événement
   A_n : "La fréquence d'apparition de pile est contenue entre 40% et 60%"
   à l'aide de la variable aléatoire $\overline{X_n}$.
   (b) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, minorer la probabilité de cet événement. *Le minorant choisi pourra dépendre du nombre de lancers n.*
4. Combien faut-il faire de lancers pour que la probabilité de A_n dépasse 95% ? Conclure.

Exercice 3. *Estimation d'une probabilité inconnue.*
Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse, et on souhaite trouver une valeur approchée de p. On effectue un prélèvement de n pièces. On suppose que le prélèvement se fait sur une population très grande, et donc qu'il peut s'apparenter à une suite de n tirages indépendants avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses et on souhaite quantifier la valeur de p.

1. Quelle est la loi de X_n ? Sa moyenne ? Sa variance ?
2. On pose $\overline{X_n} = \frac{X_n}{n}$. Calculer l'espérance et la variance de $\overline{X_n}$.
3. Démontrer que $P(|\overline{X_n} - p| \geq 0,01) \leq \frac{10000}{n}$.
4. En déduire une condition sur n pour que $\overline{X_n}$ soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%. Conclure.

Exercice 4. *D'après EDHEC 2012.*
On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose d'une pièce donnant "Pile" avec la probabilité $p \in]0,1[$ et "Face" avec la probabilité q.
On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :
— Soit si l'on a obtenu "Pile" .
— Soit si l'on a obtenu n fois "Face".
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (respectivement F_k) l'événement

« on obtient "Pile" (respectivement "Face") au k^e lancer ».

On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de "Pile" obtenus et enfin Y_n le nombre de "Face" obtenus.
On admet que T_n , X_n et Y_n sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$ que l'on ne cherchera pas à préciser.

1. Loi de T_n .
   (a) Pour tout k de $[\![1; n-1]\!]$, déterminer la probabilité $P(T_n = k)$.
   On distinguera le cas $k = 1$.
   (b) Déterminer $P(T_n = n)$.
   (c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) = 1$.
   (d) Établir que T_n possède une espérance et vérifier que $E(T_n) = \dfrac{1-q^n}{1-q}$.
2. Loi de X_n.
   (a) Donner la loi de X_n.
   (b) Vérifier que $E(X_n) = 1 - q^n$.
3. Loi de Y_n.
   (a) Déterminer, pour tout k de $[\![0; n-1]\!]$, la probabilité $P(Y_n = k)$.
   (b) Déterminer $P(Y_n = n)$.
   (c) Écrire une égalité liant les variables aléatoires T_n , X_n et Y_n , puis en déduire $E(Y_n)$.
4. Montrer que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire T dont on donnera la loi.

Exercice 5. *Chaine de Markov, D'après T. Vareschi.*
Afin de jouer son morceau préféré (*Besoin de rien envie de toi*, de Peter et Sloane) à la perfection, Alexandre S. s'entraîne tous les soirs sur sa guitare. La version d'Alexandre est composée de trois parties : l'introduction (1), le riff (2) et le solo (3). Il travaille une partie chaque soir au hasard, et ne travaille jamais la même partie deux fois de suite. Le premier soir, Alexandre travaille l'introduction. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le numéro de la partie qu'Alexandre répète au soir n. On définit également

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$$

1. Que vaut U_0 ?
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $U_{n+1} = MU_n$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que la matrice M est diagonalisable.
4. Vérifier que $2M^2 = M + I_3$ et en déduire les éléments propres de M.
5. En déduire la loi de X_n.
6. Montrer que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable X dont on précisera la loi.

Exercice 6. *Tirages sans remise et convergence en loi.*
On considère une urne constituée de $2n$ boules ($n \geq 2$), dont la moitié sont noires, et l'autre moitié sont blanches. On pioche dans cette urne deux boules successivement et sans remise, et on note X_n le nombre de boules blanches obtenues.

1. Déterminer la loi de X_n.
2. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire Z suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(2, \frac{1}{2})$.
3. Interpréter ce résultat.

Exercice 7. *Somme de trois lois binomiales.*
Soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi $\mathcal{B}(10, \frac{1}{2})$. On note $R = \frac{1}{3}(X + Y + Z)$.

1. Quelle est la loi de $T = X + Y + Z$?
2. On suppose que l'on peut approcher la loi de T par une loi normale.
   Quels sont les paramètres de cette loi normale ?
3. En déduire une valeur approchée de la probabilité $P(R \geq 4)$.
   On donne $\Phi\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right) \simeq 0,86$.

Exercice 8. *Intervalle de fluctuation d'un caractère.*
40% des individus d'une population possèdent un caractère C. On considère un échantillon de 200 individus. Peut-on affirmer, à 99%, que la probabilité de la fréquence d'apparition du caractère C dans l'échantillon soit comprise entre 30% et 50% ?
Répondre avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et le théorème central limite.

Exercice 9. *Approximation d'une loi.*
Une entreprise fabrique des jouets électroniques. Après la fabrication de ces jouets, malgré des contrôles, $0,6\%$ des jouets restent défectueux : un jouet sortant de l'entreprise a ainsi la probabilité 0,006 d'être défectueux. On considère un lot de n jouets et parmi ceux-ci on appelle X_n le nombre de jouets défectueux.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X_n ?
2. Pour n = 500, par quelle loi peut-on approcher la loi de la variable aléatoire X_n ?
   Estimer la probabilité qu'il y ait au plus deux jouets défectueux.

Exercice 10. *Surbooking.*
Une compagnie aérienne a remarqué qu'en moyenne 80% des clients ratent leur avion. Afin de ne pas laisser de places vacantes dans ses avions, la compagnie décide de vendre plus de places que la capacité d'accueil réelle (que l'on supposera égale à 336 places).
Si elle vend 400 places, quelle est la probabilité qu'elle ne satisfasse pas tous les clients présents à l'embarquement ?
On utilisera l'approximation normale d'une loi binomiale, et on donne $\Phi(2) \simeq 0,9772$.