

Feuille d'exercices 5 : Séries numériques, rappels et compléments

Exercice 1. Nature de séries numériques.

Étudier la nature des séries suivantes. Calculer la somme si possible.

1. $\sum_{n \geq 0} e^{-2n}$
2. $\sum_{n \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$
3. $\sum_{n \geq 0} \frac{n(n-1)}{6^n}$
4. $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{3^{n-2}}$
5. $\sum_{n \geq 2} (n-1) \left(-\frac{1}{2} \right)^{n+1}$
6. $\sum_{n \geq 0} \frac{(n-2)3^n}{n!}$
7. $\sum_{n \geq 0} \frac{n}{2^{2n-1}}$
8. $\sum_{n \geq 0} (n+1) \left(-\frac{1}{4} \right)^{n+1}$
9. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n + 1}{n!}$
10. $\sum_{k \geq 1} \frac{k(k+1)x^k}{k!}$ où $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Séries d'après EMLyon 2009 et 2010.

On considère deux réels strictement positifs p et q tels que $p+q = 1$. Justifier la convergence des séries suivantes, et calculer leurs sommes.

1. $\sum_{k \geq 2} (pq^{k-1} + qp^{k-1})$
2. $\sum_{k \geq 1} (pq^{k-1})^2$
3. $\sum_{k \geq 1} k \frac{2pq^k}{1+q}$

Exercice 3. Calcul d'une série à l'aide d'une base de polynômes.

On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{n^3 + 2n^2 - 4n + 1}{n!}$$

1. Montrer que la famille $(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. En déduire qu'il existe quatre réels a, b, c et d tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n^3 + 2n^2 - 4n + 1 = a + bn + cn(n-1) + dn(n-1)(n-2)$$

3. En déduire que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 4. Décomposition du terme général d'une série.

1. Trouver trois réels a, b et c tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n(n+1)(n+3)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+3}$$

2. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+3)}$.
3. En déduire la nature et la somme de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+3)}$.
4. De façon analogue, étudier la série $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n^2-1)}$.

Exercice 5. Étude de séries par critères de comparaison.

Étudier la nature des séries suivantes. On ne demande pas de calculer la somme.

1. $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k\sqrt{k}}$
2. $\sum_{k \geq 1} \frac{k^3 - k + 1}{5k^5 + 3k^4 + 2k}$
3. $\sum_{k \geq 0} \frac{k^3 - k^2 + 1}{e^k + 3k^4 + 2k}$
4. $\sum_{k \geq 1} \ln \left(1 + \frac{1}{k^2} \right)$
5. $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{\sqrt{k} \ln(k)}$
6. $\sum_{k \geq 2} \frac{5}{4^k \ln(k)}$
7. $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{e^k - e^{-k}}$
8. $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$
9. $\sum_{k \geq 0} \sqrt{k^3 + 1} - \sqrt{k^3}$
10. $\sum_{k \geq 0} e^{n^2}$
11. $\sum_{n \geq 0} \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n^3 + 1}} \right)$
12. $\sum_{k \geq 1} k^{\frac{1}{k}} - 1$

Exercice 6. Série associée à une suite récurrente.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n on a $u_n > 0$.
2. Étudier le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) .
3. On pose, pour tout entier naturel n , $v_n = \ln(u_n)$. Montrer que pour tout entier n ,
$$\sum_{k=0}^n u_k = v_0 - v_{n+1}.$$
4. En déduire la nature de la série $\sum_{k \geq 0} u_k$.

Feuille d'exercices 5 : Séries numériques, rappels et compléments

Exercice 7. *Série associée à une suite récurrente.*

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a \in]0; 1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.
2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ converge et calculer sa somme.
3. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$ est divergente.
4. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$?

Exercice 8. *Équivalent et série associée à une suite implicite.*

Pour tout entier naturel n , on considère la fonction $f_n : x \mapsto x^2 + nx - 1$.

1. Montrer que pour tout entier n , l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}^+$ que l'on notera u_n .
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente, et déterminer sa limite.
4. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n = 1$.
5. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Exercice 9. *D'après EMLyon 2015.*

On considère l'application réelle $f : x \mapsto x^3 e^x$.

1. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{f(n)}$ converge. On note $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ sa somme.
2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| S - \sum_{k=1}^n \frac{1}{f(k)} \right| \leq \frac{1}{(e-1)e^n}$$

3. En déduire un programme Python qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Exercice 10. *D'après EDHEC 2012.*

On admet que, si une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ , alors on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j = \ell$.

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$.

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n on a, $0 \leq u_n < 1$.
(b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
(c) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.
2. Pour tout entier naturel n on pose, $v_n = 1 - u_n$.
(a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \right) = \frac{1}{2}$.
(b) Utiliser le résultat admis en début d'exercice pour trouver un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.
(c) En déduire que $u_n = 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n} \varepsilon(n)$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$.
3. (a) Écrire un programme Python qui demande un nombre n en entrée et qui renvoie la valeur de u_n .
(b) En déduire un programme, rédigé en Python, qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a $1 - u_n < 10^{-3}$.

Exercice 11. *Une suite implicite tombée en colle....*

On pose

$$f_n(x) = x^n + 1 - nx$$

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, l'équation $x^n + 1 = nx$ possède une unique solution dans l'intervalle $[0,1]$. On notera x_n cette solution.
2. Justifier que $\frac{1}{n} \leq x_n \leq \frac{2}{n}$. En déduire la limite de la suite (x_n) .
3. En utilisant l'égalité $f_n(x_n) = 0$ déterminer la limite de (nx_n) .
4. Étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
En évaluant en $x = x_{n+1}$, en déduire le signe de $f_n(x_{n+1})$.
5. Déterminer le sens de variation de la suite (x_n) .
6. Quelle est la nature de la série $\sum x_n$?