Feuille d'exercices 6 : Rappels sur les variables aléatoires discrètes

Exercice 1. *Loi de probabilités simple.*
Un sauteur en hauteur tente de franchir les hauteurs successives $1, 2, \ldots, n, \ldots$. On suppose que les sauts sont indépendants les uns des autres et on suppose aussi que la probabilité de succès à la hauteur n est $\frac{1}{n}$. Le sauteur est éliminé à son premier échec. On appelle X la variable aléatoire représentant le numéro du dernier saut réussi.

1. Déterminer $P(X=1)$, $P(X=3)$ et $P(X=4)$ en justifiant soigneusement.

2. Trouver la loi de probabilité de la variable aléatoire X et vérifier que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n) = 1$$

3. Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$.

4. Montrer l'existence de $E[(X+1)(X-1)]$ et en déduire la variance de la variable aléatoire X.

Exercice 2.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant $P(X=n)>0$ pour tout entier n non nul. Le *taux de panne* de X est défini par $u_n = P_{X\geq n}(X=n)$.

1. On suppose dans cette question que X suit une loi géométrique de raison p.
  (a) Détermine $P(X \geq n)$.
  (b) Montrer que la taux de panne de X est une suite constante.

2. On suppose dans cette question que X admet un taux de panne constant, égal à $p \in]0;1[$.
  (a) Exprimer $P(X=n)$ en fonction de $P(X\geq n)$ et $P(X \geq n+1)$.
  (b) En déduire que $P(X=n+1) = (1-p)P(X=n)$.
  (c) Conclure que X suit une loi géométrique de paramètre p.

Ainsi, une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ admet un taux de panne constant si et seulement si elle est géométrique.

Exercice 3. *D'après EDHEC 2016, loi quelconque et calcul de l'espérance et de la variance.*
On désigne par p un réel de $]0,1[$ et on pose$q=1-p$. On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, définie par :

$$\forall \mathrm{k} \in \mathbb{N}^* :\ \mathrm{u_k} = -\frac{\mathrm{q^k}}{\mathrm{k}\ln \mathrm{p}}$$

Nous admettons par ailleurs les deux résultats suivants :

$$\forall x \in [0,1[\,, \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

et

$$\forall x \in]0,1[\,, \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-x)^{k-n} = \frac{1}{x^n}$$

1. (a) Vérifier que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est à termes positifs.
  (b) Montrer, en utilisant un des résultats admis, que $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 1$.

On considère dorénavant une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\forall \mathrm{k} \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{P(X=k) = u_k}$$

2. (a) Montrer que X possède une espérance et la déterminer.
  (b) Montrer également que X possède une variance et vérifier que :

$$V(X) = -\frac{q(q+\ln p)}{(p\ln p)^2}\,.$$

Exercice 4. *Une loi discrète.*
On considère la variable aléatoire X discrète définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X=k) = Ce^{-k}$$

où C est une constante réelle.

1. Déterminer la valeur de C pour que cette loi définisse correctement une loi de probabilités.

2. Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$.

3. Montrer que X admet une variance et calculer $V(X)$.

4. Déterminer la loi de $Y = X+1$ et retrouver les valeurs précédentes.

Exercice 5. *D'après ECRICOME 2015, tirages sans remise et loi uniforme.*
Dans tout cet exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3. On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2 , d'apparence identique et contenant chacune N boules indiscernables au toucher. L'urne U_1 contient $(N-1)$ boules blanches et une boule noire. L'urne U_2 contient N boules blanches.

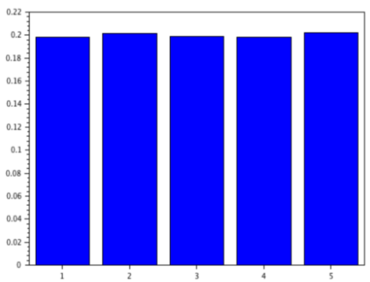
Partie 1 : Une première expérience aléatoire.

On effectue des tirages sans remise dans l'urne U_1, jusqu'à l'obtention de la boule noire. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule noire. On notera pour tout entier naturel i non nul :
— N_i l'événement « on tire une boule noire lors du i-ième tirage ».
— B_i l'événement « on tire une boule blanche lors du i-ième tirage ».

1. On simule 10000 fois cette expérience aléatoire. Recopier et compléter le programme Python suivant pour qu'il calcule les fréquences d'apparition du rang d'obtention de la boule noire dans une liste S :

```
import random
with numpy as np
N = int( input( 'Donner un entier naturel non nul' ) )
    S=np.zeros(N)
    for k in range(1,10001
        tirages=1
        Blanches=....
        while random.random() < .........
          tirages=tirages+1
          Blanches = ...........
        S(tirages)=S(tirages)+1
    print(S/10000)
```

2. On exécute le programme complété ci-dessus, en entrant 5 au clavier. Avec le résultat obtenu, on a tracé l'histogramme suivant :



Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la loi de la variable aléatoire X ?
Pour les questions suivantes, on revient au cas général où $N \geq 3$.

3. En écrivant soigneusement les événements utilisés, calculer $P(X=1)$, $P(X=2)$ et $P(X=3)$.

4. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

5. Préciser le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la boule noire.

Partie 2 : Une deuxième expérience aléatoire.

On choisit une des deux urnes au hasard (chaque urne a la même probabilité d'être choisie) et on tire dans l'urne choisie une par une les boules sans remise jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie. On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués. On note :
— C_1 l'événement « on choisit l'urne U_1 ».
— C_2 l'événement « on choisit l'urne U_2 ».

6. Montrer que, pour tout $j \in [\![1, N]\!]$:

$$P_{C_1}(Y=j) = \frac{1}{N}$$

7. Calculer $P_{C_2}(Y=j)$ pour tout entier $j \in [\![1, N]\!]$.
On distinguera les cas $j = N$ et $1 \leq j \leq N-1$).

8. Montrer que :

$$P(Y=j) = \begin{cases} \frac{1}{2N} & \text{si } j \in [\![1, N-1]\!] \\ \frac{1}{2} & \text{si } j = N \end{cases}$$

9. Calculer l'espérance de Y.

Exercice 6. *D'après ECRICOME 2018.*
Soit n un entier naturel non nul.
Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.
Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque Pile obtenu.
En particulier, s'il n'obtient aucun Pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à p ($p \in]0,1[$), et celle d'obtenir Face est de $1-p$.
On notera X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Enfin, on notera A l'événement : « le joueur est déclaré vainqueur » et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.

Partie I

Dans cette partie, on suppose que $n=3$ et $p=\dfrac{2}{3}$.

1. Reconnaître la loi de X et vérifier que : $P(A)=\dfrac{13}{27}$.

2. Montrer que : $G(\Omega)=\{-30,-10,0,20\}$, puis expliciter la loi de G.

3. Calculer l'espérance de G. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Partie II

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est entier naturel non nul et $p \in]0,1[$.
Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant « À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants ! », et cherche donc les conditions nécessaires sur p et n pour que son affichage ne soit pas mensonger.
Soit Y la variable aléatoire définie par : $Y=(-1)^X$.
Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

4. (a) On note $Z=\dfrac{Y+1}{2}$. Déterminer $Y(\Omega)$, puis montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.

(b) Démontrer que : $E(Y)=2P(A)-1$.

5. (a) Donner la loi de X.

(b) En déduire que l'on a également : $E(Y)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$,

puis que : $E(Y)=(1-2p)^n$.

6. Exprimer alors la valeur de $P(A)$ en fonction de n et p.

7. Démontrer que

$$P(A)\geq\frac{1}{2}\Longleftrightarrow\left[p\leq\frac{1}{2}\text{ OU « }n\text{ est pair »}\right]$$

Partie III

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est à dire en faisant en sorte que $P(A)\geq\dfrac{1}{2}$), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est à dire que $E(G)\leq 0$).

8. Exprimer G en fonction de X et Y. En déduire que :

$$E(G)=10\sum_{k=0}^{n}(-1)^k kP(X=k)$$

9. Démontrer que : $\forall k\in[\![1,n]\!],\quad k\dbinom{n}{k}=n\dbinom{n-1}{k-1}$.

10. Montrer que : $E(G)=-10np(1-2p)^{n-1}$

11. Démontrer alors que :

$$\left\{\begin{array}{l}P(A)\geq\dfrac{1}{2}\\ \\ E(G)\leq 0\end{array}\right.\Longleftrightarrow p\leq\frac{1}{2}$$

12. (a) Étudier la fonction f définie sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ par :

$$\forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\qquad f(x)=x(1-2x)^{n-1}$$

(b) Pour une valeur de n fixée, comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce (c'est à dire quelle valeur doit-il donner à $p\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$) pour optimiser la rentabilité de son activité ?