Feuille d'exercices 7 : Applications linéaires

Exercice 1. *Des applications linéaires.*

Montrer que les applications suivantes sont des applications linéaires :

$$f: \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \quad g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+z \end{pmatrix} \quad (x, y) \mapsto (2x-y, 3x+y)$$

$$h: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad i: \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto M + (b+c)I_2 \quad P \mapsto (X+1)P' + 2P$$

Exercice 2. *Endomorphisme au carré.*

Soit $E = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de E tel que

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ puis, de façon générale $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$.

2. On rappelle que l'application $f \circ f$ est notée f^2 .

(a) Calculez $f^2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ puis $f^2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(b) En déduire, de façon générale, $f^2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$.

Exercice 3. *Calculs de noyaux.*

Pour chacune des applications linéaires suivantes, déterminez le noyau et indiquez si l'application est injective.

$$f: \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \quad g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+z \end{pmatrix} \quad (x, y) \mapsto (2x-y, 3x+y)$$

$$h: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad i: \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$$

$$(a, b, c, d) \mapsto \begin{pmatrix} 2a-d & b+d \\ 3a+c & 0 \end{pmatrix} \quad P \mapsto (X+1)P' + 2P$$

$$j: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

$$M \mapsto M \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times M$$

Exercice 4. *Calcul d'images.*

Pour chacune des applications linéaires de l'exercice 3, déterminez l'image et indiquez si l'application est surjective.

Exercice 5. *Action d'une application linéaire sur une base.*

On considère l'application linéaire f définie par

$$f: \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$$

$$P \mapsto 2(X-1)P' + P - X^2P''$$

1. Rappeler la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, et calculer les images de chacun de ses vecteurs par la fonction f .

2. En déduire l'image du polynôme $Q = 4X^3 - 6X^2 + 8X + 1$ par l'application f .

Exercice 6. *Noyau et image d'une application linéaire.*

Soit g l'endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ défini par

$$g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2x+y+z \\ x-2y+z \\ x+y-2z \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le noyau et l'image de g .

2. L'application g est-elle un automorphisme?

Exercice 7. *Noyau et image d'une application linéaire.*

On considère l'application linéaire $g: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z, t) \mapsto (2x+y+z, x+y+t, x+z-t)$$

1. Déterminer le noyau de g .

2. Déterminer l'image de g .

3. L'application g est-elle injective? Surjective?

Exercice 8. *Étude d'une forme linéaire.*

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = x - 2y + z$.

1. Montrer que f est une forme linéaire.

2. Déterminer $Im(f)$.

3. Déterminer $Ker(f)$. On en donnera une base et la dimension.

Exercice 9. *D'après EMLyon 2017.*

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de E . On note, pour tout polynôme P de E :

$$a(P) = P - XP' \text{ et } b(P) = P - P'$$

1. Justifier que a est un endomorphisme de E et déterminer $Ker(a)$ et $Im(a)$.

2. Justifier que b est un automorphisme de E et justifier que $b^{-1}(Q) = Q + Q' + Q''$.