

Couple de variables aléatoires d'après ECRICOME 2022

On dispose de 3 urnes U_1 , U_2 et U_3 et de 2 jetons.

Pour chacun de ces jetons, on choisit une urne au hasard (uniformément) et on y place le jeton. Les choix des urnes se font de façon indépendante.

On notera X_1, X_2, X_3 le nombre de jetons présents dans les urnes 1, 2 et 3 respectivement, après avoir réparti les deux jetons. On notera Y le nombre d'urnes encore vides.

1. a) Donner la loi commune à X_1, X_2 et X_3 .
b) Calculer son espérance et sa variance.
2. a) Justifier l'égalité $(X_1=0) \cap (X_2=0) = (X_3=2)$, puis calculer $P(X_1=0 \cap X_2=0)$
b) Est-ce que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes ?
3. a) Quel est le support de la variable aléatoire Y ?
b) Déterminer la loi du couple (X_1, Y) .
c) En déduire la loi (marginale) de Y .
e) Calculer l'espérance de Y .
4. Les variables aléatoires X_1 et Y sont-elles indépendantes ?
5. (Plus tard...) Calculer la covariance de (X_1, Y)
Indication : utiliser la formule de König-Huïjgens $Cov(X_1, Y) = E(X_1 Y) - E(X_1)E(Y)$