Maximum de 2 variables aléatoires à densité
Inspiré par EDHEC 2003

Je compte sur vous pour faire cet exercice au cours de mon absence le lundi 29/1/2024.

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction définie par : $f(t)=\begin{cases} n\,t^{n-1} & \text{si } 0\leq t\leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité.

On considère désormais une variable aléatoire X ayant *f* pour densité.

2. Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

On calculera $F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ *en distinguant selon la valeur de x.*

3. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Si oui, calculer sa valeur en fonction de n.

4. Montrer que X admet une variance, et que $V(X)=\dfrac{n}{(n+2)(n+1)^2}$

5. On considère une variable aléatoire Y, indépendante de X, ayant également *f* pour densité.

On pose T = max(X , Y) , c'est-à-dire que pour tout réel x, $(T\leq x)=(X\leq x\cap Y\leq x)$

a) Justifier que $P(T\leq x)=P(X\leq x)^2$.

b) En déduire la fonction de répartition de T. *Utiliser la question 2.*

c) En dérivant, trouver la densité de T.

d) La variable T admet-elle une espérance ? Si oui, calculer sa valeur.