Fiche méthode n°3 – Séries

Pour montrer qu'une série $\sum u_k$ est convergente :

- On calcule la *somme partielle* $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et on montre qu'elle converge.
- On la décompose en *séries de référence*

$$\sum_{k\geq 0} q^k \quad , \quad \sum_{k\geq 0} k q^{k-1} \quad , \quad \sum_{k\geq 0} k(k-1) q^{k-2} \quad , \quad \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$$

et on conclut avec les conditions $-1<q<1$ ou $\alpha>1$

- Lorsque la suite (u_k) est <u>positive</u>, on utilise un critère de comparaison :
  - si $u_k \leq v_k$ et $\sum v_k$ converge, alors $\sum u_k$ converge
  - si $u_k = o(v_k)$ et $\sum v_k$ converge, alors $\sum u_k$ converge

    → *Typiquement, on montre que* $\frac{u_n}{1/n^2} \to 0$ *, c'est-à-dire* $u_n = o(1/n^2)$
  - si $u_k \sim v_k$ et $\sum v_k$ converge, alors $\sum u_k$ converge.

    → *Typiquement, on montre que* $\frac{u_n}{1/n^2} \to 1$ *, c'est-à-dire* $u_n \sim \frac{1}{n^2}$.
- On montre que la série est *absolument convergente*, c'est-à-dire que la série $\sum |u_k|$ converge.

Pour montrer qu'une série $\sum u_k$ est divergente :

- On calcule la *somme partielle* $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et on montre qu'elle diverge.
- On montre que le terme général ne tend pas vers 0.
- Lorsque la suite (u_k) est <u>positive</u>, on utilise un critère de comparaison :
  - si $v_k \leq u_k$ et $\sum v_k$ diverge, alors $\sum u_k$ diverge

    → *Typiquement, on montre que* $u_n \geq \frac{1}{n}$.
  - si $v_k = o(u_k)$ et $\sum v_k$ diverge, alors $\sum u_k$ diverge.
  - si $u_k \sim v_k$ et $\sum v_k$ diverge, alors $\sum u_k$ diverge

Pour calculer la somme d'une série $\sum u_k$:

- On calcule la limite de la *somme partielle* $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

  → Penser à repérer le cas *téléscopique* $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_{k+1} - x_k$
- On effectue un découpage en *séries de référence*

$$\sum_{k\geq 0} q^k = \frac{1}{1-q} \quad , \quad \sum_{k\geq 0} k q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \quad , \quad \sum_{k\geq 0} k(k-1) q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3} \quad , \quad \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

où les trois premières exigent que $-1<q<1$