Fiche méthode n°4 – Applications linéaires

Pour montrer qu'une application *f* est linéaire :

- On montre que $f(x+y)=f(x)+f(y)$ et $f(\lambda x)=\lambda f(x)$ pour tous x,y vecteurs et λ réel.

  → Dans certaines corrections : $f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y)$ voire $f(\lambda x+y)=\lambda f(x)+f(y)$
- On montre que *f* est combinaison linaire , composée ou bijection réciproque d'applications linéaires.

Pour calculer le noyau d'une application linéaire *f* :

- On résout $f(x)=0_F$ d'inconnue *x*. *Cela se traduit par un système d'équations homogène (se terminant toutes par =0)*

  → L'ensemble solution trouvé est un sous-espace vectoriel de E, éventuellement réduit à $\{0_E\}$

  → Si on connaît Im(f), on connaît sa dimension : dim Ker(f) = dim E – dim Im(f)

Pour calculer l'image d'une application linéaire *f* :

- On détermine l'ensemble des images $f(x)$ à partir de l'expression de *f*

  → Décomposer l'expression sous la forme

$$f(x)=x V_1+y V_2+z V_3+...$$

  auquel cas $\mathrm{Im}\, f=Vect(V_{1,} V_{2,}...)$

  → Si on connaît Ker(f), on connaît sa dimension : dim Im(f) = dim E – dim Ker(f)

Pour calculer le rang d'une application linéaire *f* :

- On détermine la dimension de Im(f)
- On calcule le rang de la matrice de *f*

  → C'est-à-dire $\dim Vect(C_{1,} C_{2,} ..., C_n)$ où $C_{1,} C_{2,} ...$ sont les colonnes de la matrice de *f*
- On utilise le *théorème du rang* rg(f) = dim Im(f) = dim E – dim Ker(f)

Pour montrer qu'une application linéaire *f* est injective :

- On prouve que $Ker(f)=\{0_E\}$
- On montre que dim Ker(f) = 0

Pour montrer qu'une application linéaire *f* est surjective :

- On prouve que $\mathrm{Im}(f)=F$
- On montre que dim Im(f) = dim F

Pour montrer qu'une application linéaire *f* est bijective :

- On montre que f est injective et surjective.

  → Si f est un endomorphisme, un seul suffit !
- On montre que la matrice associée à *f* est inversible.

Pour calculer la matrice associée à une application linéaire *f* :

- On calcule les images d'une base $f(e_1), f(e_2), f(e_3), ...$, qu'on décompose dans la base de F
- On place les résultats dans chaque colonnes de la matrice (1e colonne pour $f(e_1)$, etc)