Fiche méthode n°5 – Comparaison de fonctions, développements limités.

Pour montrer qu'une fonction f est négligeable devant une fonction g (i.e. f=o(g)) on peut :

- Utiliser les croissances comparées.
- Montrer, si $g(x)\neq 0$ au voisinage du point considéré, que $\lim \frac{f(x)}{g(x)}=0$

Pour montrer que deux fonction f et g sont équivalentes (i.e. f~g) on peut :

- Utiliser les équivalents de référence.
- Montrer, si $g(x)\neq 0$ au voisinage du point considéré, que $\lim \frac{f(x)}{g(x)}=1$
- Un polynôme est équivalent à
  - son monôme de *plus haut* degré en $\pm\infty$
  - son monôme de *plus bas* degré en 0
- une fonction équivaut au *premier terme non nul* de son développement limité.

Pour calculer un développement limité à l'ordre 2, on peut :

- Utiliser la formule de *Taylor-Young* :

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+o\left((x-a)^2\right)$$

qui donne, pour a=0 : $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)$

Si je dispose d'un développement limité d'ordre 2, je peux directement :

- Donner un équivalent de la fonction → premier terme non nul du D.L.
- Donner l'équation de la tangente $y=f(a)+f'(a)(x-a)$ (début du D.L.) et la position de C_f par rapport à cette tangente au voisinage de a.
  - $f''(a)>0\Rightarrow C_f$ au-dessus de la tangente.
  - $f''(a)<0\Rightarrow C_f$ en dessous de la tangente.

Pour montrer qu'une fonction est continue ;

- **Sur un intervalle où il n'y a qu'une seule formule :**
  - Justifier qu'elle est combinaison (produit, somme, quotient avec dénominateur ≠ 0, composée) de fonctions continues de référence (polynômes, exp, logarithme,...).
- **En un point :** montrer que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to} a} f(x)=\lim\limits_{x\overset{<}{\to} a} f(x)=f(a)$

Pour montrer qu'une fonction est dérivable, je peux ;

- **Sur un intervalle :** Justifier qu'elle est combinaison (...) de fonctions dérivables de référence (...).
- **En un point :** Montrer que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\overset{>}{\to} a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\overset{<}{\to} a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

- Utiliser le *théorème de prolongement C^1* .

  Si f est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathbb{R}^*$ et si $\lim\limits_{x\to 0} f'(f)=L$.

  Alors f est dérivable en 0, $f'(0)=L$ et f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Pour montrer qu'une fonction est de classe C^k, je peux :

- Justifier qu'elle est combinaison (...) de fonctions de classe C^k de référence (...).
- Montrer qu'elle est k fois dérivable, et que la dérivée $f^{(k)}$ est continue.
- Pour la classe C^1, utiliser le théorème de prolongement C^1.

<u>Développements limités au voisinage de 0 de référence :</u>

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2) \qquad \ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+o(x^2)$$