Fiche méthode n°6 – Couples de variables aléatoires

Pour déterminer la ;

- *Loi conjointe* de (X,Y) , on calcule les probabilités $P(x=i\cap Y=j)$
- *Loi marginale de X* on calcule $P(X=i)=\sum_j P(X=i\cap Y=j)$

  Loi marginale de Y on calcule $P(Y=j)=\sum_i P(X=i\cap Y=j)$
- *Loi conditionnelle de X, sachant que Y=j*, on calcule les probabilités $P_{Y=j}(X=i)=\dfrac{P(X=i\cap Y=j)}{P(Y=j)}$

Pour calculer la loi de Z=g(X,Y) , fonction de deux variables aléatoires X et Y :

- **Règle générale :** Traduire (Z=k) par par des événements de type $\{(X=i)\cap(Y=j)\}$ et calculer

  $P(Z=k)=\sum P(X=i\cap Y=j)$ où i et j parcourent les valeur correspondant à (Z=k)

  Cas particuliers :
  - Si Z = X+Y , on a $P(Z=k)=P(X+Y=k)=P(Y=k-X)=\sum_i P(X=i\cap Y=k-i)$
  - Si Z = X -Y , on a $P(Z=k)=P(X-Y=k)=P(X=k+Y)=\sum_i P(X=k+i\cap Y=i)$
  - Si Z= max(X,Y), alors
    - on calcule $P(Z\leq k)=P(\max(X,Y)\leq k)=P(X\leq k\cap Y\leq k)$
    - on détermine $P(Z=k)=P(Z\leq k)-P(Z\leq k-1)$
- **On reconnaît un cas usuel :**
  - Si Z=min(X,Y) où X et Y suivent de *lois géométriques* indépendantes alors Z suit une loi géométrique.

    Hors-programme, mais susceptible de tomber en concours.
  - Si Z=X+Y où X et Y suivent des *lois binomiales* <u>indépendantes</u> $B(n_1,p)$ et $B(n_2,p)$

    alors Z suit une loi binomiale $B(n_1+n_2,p)$
  - Si Z=X+Y où X et Y suivent des *lois de Poisson* <u>indépendantes</u> $P(\lambda_1)$ et $P(\lambda_2)$

    alors Z suit une loi de Poisson $P(\lambda_1+\lambda_2)$

Pour calculer l'espérance de Z=g(X,Y), on peut :

- Si on connaît la loi de Z, $E(Z)=\sum_k k\,P(Z=k)$ sous réserve de *convergence absolue*.
- Utiliser le *théorème de transfert* : $E(Z)=\sum_{i,j} g(i,j)P(X=i\cap Y=j)$ sous réserve de *convergence absolue*.

  Exemple type : $E(X+Y)=\sum_{i,j}(i+j)P(X=i\cap Y=j)$
- Utiliser les propriétés de l'espérance :
  - $E(\lambda X+Y)=\lambda E(X)+E(Y)$
  - $E(XY)=E(X)E(Y)$ si X et Y sont indépendants.

Pour calculer la covariance de deux variables aléatoires X et Y, on peut :

- Si X et Y sont *indépendantes* : $Cov(X,Y)=0$
- Utiliser le *théorème de König-Huygens* : $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$
- Utiliser les propriétés de la covariance : Cov(X,X) = V(X) , bilinéarité, ...