Fiche méthode n°7 – Intégrales généralisées.

Pour montrer qu'une intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ converge, je peux :

- Dans le cas $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ calculer $\int_0^x f(t)\,dt$ et faire tendre $x \to +\infty$.
  - ☞ Adapter cette méthode aux autres cas, avec des limites aux bornes *impropres*.

- Identifier une *intégrale de référence*.
  - *Intégrales de Riemann*
    $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge ssi $\alpha > 1$ et $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge ssi $\alpha < 1$
  - *Intégrales exponentielles*
    $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dt$ converge ssi $\lambda > 0$

- Si la fonction *f* est <u>positive</u>, utiliser les *critères de comparaison*.
  - ☞ **Exemple type :** si $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ alors $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

- Montrer que l'intégrale est *absolument convergente*.
  - ☞ étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} |f(t)|\,dt$. *En général, plus difficile...*

Pour montrer qu'une intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge, je peux :

- Dans le cas $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ calculer $\int_0^x f(t)\,dt$,

  faire tendre $x \to +\infty$ et trouver une limite *infinie*.
  - ☞ Adapter cette méthode aux autres cas, avec des limites aux bornes *impropres*.

- Si la fonction *f* est <u>positive</u>, utiliser les *critères de comparaison*.
  - ☞ **Exemple type :** si $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ alors $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

Pour calculer une intégrale ordinaire $\int_a^b f(t)\,dt$, je peux :

- Déterminer une primitive F de f, et effectuer le calcul

$$\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

  - ☞ Pour calculer la primitive, utiliser le formulaire au verso :
    Soit la fonction est une fonction de référence.
    Soit il faut faire apparaître une des formules de primitives (parfois difficile...)

- Utiliser la formule d'intégration par parties, si l'intégrale comporte un produit :

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

  - ☞ Pour un 'bon' choix de u' et v :
    → u' : fonction qu'on *sait* primitiver.
    → v : fonction qui est simplifiée en dérivant (logarithme – puissance – exponentielle)

- Faire un *changement de variable* (attendre annexe)

Fiche méthode n°7 – Intégrales généralisées.

Primitives des fonctions de référence

Fonction	Primitive	Sur ...
$x^n,\ n\in\mathbb{N}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x^n,\ n\in\mathbb{Z},\ n\neq 1$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}^*$
$x^\alpha,\ \alpha>0$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$\mathbb{R}_*$

Formules de primitives

u désigne une fonction continue

Fonction	Primitive
$u'\times u^n,\ n\in\mathbb{N}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$u'\times u^n,\ n\in\mathbb{Z},\ n\neq 1$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$u'\times u^\alpha,\ \alpha>0$	$\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$
$u'\times u$	$\frac{1}{2}u^2$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$
$u'e^u$	e^u
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)$