Fiche méthode n°8 – Fonctions de 2 variables.

Pour montrer qu'une fonction de 2 variables est continue, je peux :

- Dire qu'elle est somme, produit, quotient (dénominateur ≠ 0) et/ou composée de fonctions continues.

De façon analogue, on montre qu'une fonction de 2 variables est dérivable, de classe C^1 ou de classe C^2.

Pour calculer les dérivées partielles d'une fonction de deux variables :

- La *dérivée partielle par rapport à x* , notée $\partial_1 f(x,y)$, est obtenue en dérivant "par rapport à *x*"

  ☞ Toute formule en *y* est considérée comme une constante.

- La *dérivée partielle par rapport à y* , notée $\partial_2 f(x,y)$, est obtenue en dérivant "par rapport à *y*"

Le *gradient de f* est le vecteur formé de ces deux dérivées partielles : $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}\partial_1 f(x,y)\\ \partial_2 f(x,y)\end{pmatrix}$

Pour déterminer les points critiques d'une fonction de 2 variables :

- Résoudre le système d'équations $\begin{cases}\partial_1 f(x,y)=0\\ \partial_2 f(x,y)=0\end{cases}$. Les solutions (x,y) sont les *points critiques*.

Pour déterminer la nature d'un point critique (x,y) :

- On calcule la *matrice hessienne* $\nabla^2 f(x,y)=\begin{pmatrix}\partial^2_{1,1} f(x,y) & \partial^2_{1,2} f(x,y)\\ \partial^2_{2,1} f(x,y) & \partial^2_{2,2} f(x,y)\end{pmatrix}$ au point critique (x,y).

  → Il faut dériver les dérivées partielles à nouveau par rapport à *x* et *y*.

  → Cette matrice est <u>symétrique</u> si *f* est de classe C^2, en vertu du *théorème de Schwarz.*

- On calcule les valeur propres de la matrice Hessienne :
  - Si elles sont strictement positives, (x,y) correspond à un *minimum local*.
  - Si elles sont strictement négatives, (x,y) correspond à un *maximum local*.
  - Si elles sont de signes opposés, (x,y) correspond à un *point col*, et n'est pas un extremum.
  - Si une des valeurs propres est nulle, on ne peut pas conclure.

    ☞ Dans ce cas, il y a sans doute une erreur dans vos calculs.

Remarque : La matrice hessienne est d'ordre 2. Pour savoir si λ est valeur propre, on utilise le *déterminant* :

$A-\lambda I_2=\begin{pmatrix}a-\lambda & b\\ c & d-\lambda\end{pmatrix}$ est non inversible ssi $det(A-\lambda I_2)=(a-\lambda)(d-\lambda)-cb=0$

Cette dernière équation (du second degré en λ) donne rapidement les valeurs propres de A.

Pour savoir si un point critique est un extremum local :

- Se référer au point précédent. Seul le cas du point col ne correspond pas à un extremum local.