Fiche méthode n°8 – Variables aléatoires à densité.

Pour montrer que F la fonction de répartition d'une v.a à densité, je peux :

Montrer que :

- F est continue et de classe C^1, sauf en un nombre fini de points.
- F est croissante.
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Pour déterminer la fonction de répartition d'une va à densité X, je peux :

- Calculer l'intégrale

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad \text{où } f = \textit{densité de X.}$$

- Calculer $P(X \leq x)$ en décomposant l'événement $X \leq x$
- Si X est définie à partir d'une autre v.a à densité : $X = f(T)$ (transfert)
  - Calculer $P(X \leq x)$ à partir de $P(T \leq x)$.

Pour montrer qu'une fonction *f* est une densité, je peux :

Montrer que :

- *f* est positive ou nulle.
- *f* est continue, sauf en un nombre fini de points.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

Pour déterminer la densité d'une va X, je peux :

- Dériver la *fonction de répartition* $f(t) = F_X'(t)$
- Si X fonction d'une autre va à densité : $X = f(T)$
  - Identifier un transfert usuel du cours (uniforme, exponentiel)

  Calculer la fonction de répartition $P(X \leq x)$, et la dériver.

Pour calculer la probabilité d'une variable aléatoire à densité :

- On intègre la *densité* entre *a* et *b* : $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\,dt$
- On utilise la *fonction de répartition* :

  $$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a)$$

  ☞ Dans le cas d'une loi normale, on utilise le tableau.

Pour calculer l'espérance d'une variable aléatoire à densité, je peux :

- Si X est une v.a usuelle, utiliser le formulaire.
- Calculer $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\,dt$ sous réserve de *convergence absolue.*
- Si X est fonction d'une autre v.a à densité : $X = g(T)$
  - Utiliser le *théorème de transfert*

    $$E(X) = E(g(T)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,f(t)\,dt$$

    sous réserve de convergence absolue.

  - Utiliser les règles

    $$E(aX + b) = a\,E(X) + b \quad , \quad E(X_1 + \ldots + X_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n)$$

    et, dans le cas <u>indépendant</u> :

    $$E(X_1 \times \ldots \times X_n) = E(X_1) \times \ldots \times E(X_n)$$

Pour calculer la variance d'une variable aléatoire à densité, je peux :

- Si X est une v.a usuelle, utiliser le formulaire.
- Utiliser le *théorème de Konig-Huijgens :*

  $$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

  sous réserve d'existence de $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$

- $V(aX + b) = a^2 V(X)$ et, dans le cas <u>indépendant</u> :

  $$V(X_1 + \ldots + X_n) = V(X_1) + \ldots + V(X_n)$$