Fiche méthode n°3,5 – Variables aléatoires discrètes

<u>Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète X :</u>

- On donne le *support* $X(\Omega)$: valeurs possibles pour X.
  ☞ *Utiliser du bon sens : quelle valeur minimimale/maximale ?*

- On donne la probabilité $P(X=k)$ pour chaque k possible, à l'aide :
  - d'un arbre et les formules du cours (probabilités totales, ...)
  - de la *fonction de répartition* $F_X(x)=P(X\leq x)$ et la formule

$$P(X=k)=P(X\leq k)-P(X\leq k-1)=F_X(k)-F_X(k-1)$$

☞ *Si le support est fini, on peut présenter la loi sous forme de tableau.*

<u>Pour calculer l'espérance d'une variable aléatoire discrète :</u>

- Si X est une variable aléatoire de référence, utiliser le formulaire.
- On calcule la série $E(X)=\sum_{k\in X(\Omega)} k\ P(X=k)$ en justifiant qu'elle est *absolument convergente :*
  - Si le support est <u>fini</u>, c'est automatique (série "finie" = somme)
  - Si X ne prend que des valeurs positives, étudier directement la série.
    ☞ *Dans ce cas, la convergence revient à la convergence absolue.*
  - Sinon, montrer que la série $\sum_{k\in X(\Omega)} |k\ P(X=k)|$ converge puis calculer

$$E(X)=\sum_{k\in X(\Omega)} k\ P(X=k)$$

- Si $Y=aX+b$ avec Y d'espérance connue, utiliser la formule :

$$E(Y)=E(aX+b)=aE(X)+b$$

<u>Comment utiliser le théorème de transfert ?</u>

Lorsqu'on souhaite calculer $E(f(X))$ où *f* est une fonction donnée :

$$E(f(X))=\sum_{k\in X(\Omega)} f(k)\ P(X=k)$$

en précisant que la série est absolument convergente.

<u>Exemple type :</u> Moment d'ordre 2 $E(X^2)=\sum_{k\in X(\Omega)} k^2\ P(X=k)$

<u>Pour calculer la variance d'une variable aléatoire discrète :</u>

- Si X est une variable aléatoire de référence, utiliser le formulaire.
- On calcule $E(X)$ et $E(X^2)$ et on utilise la *formule de Koenig-Huijgens* :

$$V(X)=E(X^2)-E(X^2)$$

- Si $Y=aX+b$ avec Y une v.a d'espérance connue, utiliser la formule :

$$V(Y)=V(aX+b)=a^2V(X)$$