

Fiche méthode n°1 – Espaces vectoriels

Pour montrer qu'un ensemble F est un (sous-)espace vectoriel, on peut :

- Montrer qu'il est
 - **non vide et stable par combinaison linéaire**
 - ☞ On cherche un élément, le plus simple possible, appartenant à F.
en général : vecteur nul, matrice nulle, ...
 - ☞ Pour tous x, y dans F et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on montre que $\lambda x + \mu y \in F$
- Écrire F comme un *espace vectoriel engendré* : $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$
 - ☞ Exploiter les équations définissant F
 - ☞ Exprimer des dépendances entre les éléments de F
 - ☞ Décomposer ses vecteurs comme combinaisons linéaires

Cette seconde méthode est préférable, car elle fournit une famille génératrice...

Pour montrer qu'un ensemble n'est pas un (sous-)espace vectoriel, on peut :

- Montrer qu'il ne contient pas le *vecteur nul*
 - ☞ ce vecteur nul peut être une colonne de 0, la matrice nulle, ...
selon l'espace dans lequel est situé F
- Montrer qu'il n'est pas stable par combinaison linéaire, à l'aide d'une contre-exemple : $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et x et y dans F pour lesquels $\lambda x + \mu y \notin F$

Pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel E :

- Si on connaît une base de E, son nombre de vecteurs donne la dimension de E.
- Dans le cas où $E = M_{n,p}(\mathbb{R})$ on sait que $\dim(E) = n \cdot p$
- Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$ on sait que $\dim(E) = n$
- Dans le cas où $E = \mathbb{R}_n[X]$ on sait que $\dim(E) = n + 1$

Attention : un sous-espace de E a forcément une dimension inférieure à celle de E.

Pour montrer qu'une famille de vecteurs $e_1, e_2, e_3, \dots$ est génératrice :

On montre que tout $x \in E$ peut s'écrire $x = \lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_n \cdot e_n$

☞ On pose le système correspondant à $\lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_n \cdot e_n = x$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les inconnues.

☞ Si le système possède au moins une solution, $(e_1, e_2, e_3, \dots)$ est génératrice.

Il n'est pas nécessaire de résoudre ce système !

Pour montrer qu'une famille de vecteurs $e_1, e_2, e_3, \dots$ est libre :

- Un seul vecteur non-nul forme automatiquement une famille libre.
- Deux vecteurs non-colinéaires forment automatiquement une famille libre.
- Si non, on montre que $\lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_n \cdot e_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$
- ☞ On pose le système $\lambda_1 \cdot e_1 + \dots + \lambda_n \cdot e_n = 0_E$.
- ☞ On résout le système pour arriver à la solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Si on ne parvient pas à cette conclusion, on peut dire que la famille de vecteurs est *liée*, et que l'un des vecteurs $e_1, e_2, e_3, \dots$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

Pour montrer qu'une famille de vecteurs $e_1, e_2, e_3, \dots$ est une base, on peut :

- Montrer qu'elle est *libre* et *génératrice*.
- Montrer qu'elle est libre, et formée de n vecteurs dans un espace de dimension n.
- Montrer qu'elle est génératrice et formée de n vecteurs dans un espace de dimension n.

Exemple : La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est libre, car formée de 2 vecteurs non-colinéaires. Comme $\dim(M_{2,1}(\mathbb{R})) = 2$ elle forme une base de cet espace.