Fiche méthode n°2 – Diagonalisation de matrices carrées

A désigne une matrice carrée d'ordre n

Pour montrer qu'un vecteur-colonne X est un vecteur propre :

On dit que X est <u>non-nul</u>, et on montre que $AX=\lambda X$ pour un certain réel λ

λ : *valeur propre associée*

Pour montrer que λ est une valeur propre, on peut :

- Résoudre $AX=\lambda X$, et montrer qu'on obtient un s.e.v non nul

  = *sous-espace propre (s.e.p)* associé à λ
- Montrer que la matrice $A-\lambda I_n$ n'est pas inversible.

  ☞ Si $A-\lambda I_n$ a une colonne de zéros ou des colonnes identiques, c'est "évident".

  ☞ Si A est de taille 2 on peut calculer le déterminant "ad – bc".

  Si le déterminant vaut zéro, λ est bien valeur propre.

  ☞ On évitera de foncer tête baissée dans la méthode du pivot de Gauss sur $A-\lambda I_n$

  Cette méthode <u>très lourde</u> fonctionne, mais n'est pas au programme.

Pour trouver les valeurs propres, on peut :

- Si A est triangulaire, les valeurs propres se lisent sur sa diagonale.
- Si $P(A)=0$ pour un polynôme P, les racines de P sont les seules vap possibles

  P : polynôme annulateur.

  Il faut confirmer que ce sont effectivement des valeurs propres, par un calcul de s.e.p.
- Etudier l'inversibilité de $A-\lambda I_n$:

  $A-\lambda I_n$ non inversible ⇔ λ est valeur propre.

  Mêmes remarques que ci-dessus au bout des doigts ☞

Pour calculer les sous-espaces propres :

On résout $AX=\lambda X$ pour chacune des valeurs propres λ

→ système dont la solution **n'est pas** $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\end{pmatrix}$

L'ensemble solution est le *sous-espace propre* E_λ

Pour montrer que *A* est diagonalisable, on peut :

- Constater que A est symétrique
- Montrer que A admet autant de valeurs propres que sa taille.
- Montrer que : "somme des dimensions des s.e.p" = n (taille de A)

Pour diagonaliser A :

- On calcule les valeurs propres et les sous-espaces propres.
- On « accolle » les bases des s.e.p trouvées pour former la matrice de passage P
- On crée une matrice diagonale D avec les valeurs propres sur la diagonale

  ☞ *Chaque valeur propre correspond à une colonne de P, il peut y avoir des doublons.*
- On écrit $A=PDP^{-1}$