Annexe 3 : Suites de variables aléatoires discrètes.

1. Loi conjointe, loi marginale

<u>Définitions :</u> Soient X_1 , X_2 , X_3 , ... , X_n des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisable (Ω,T).

● *La loi conjointe* de (X_1, X_2, X_3, ... , X_n) est l'ensemble des probabilités

$$P(X_1=x_1 \cap X_2=x_2 \cap ... \cap X_n=x_n)$$

où x_1 est dans le support de X_1, ... , x_n est dans le support de X_n .

● La loi de chacune de ces variables aléatoires X_k est appelée *loi marginale*.

Exemple 1 : X_1 , X_2, X_3 sont les résultats de 3 dés équilibrés à 6 faces.

La loi conjointe de (X_1, X_2, X_3) est

$$P(X_1=x \cap X_2=y \cap X_3=z)=\frac{1}{6^3}$$

pour tous les résultats x, y et z dans [[1 ; 6]]

La loi marginale de X_1 est $P(X_1=k)=\frac{1}{6}$ pour k dans [[1 ; 6]]

Exemple 2 : Une puce située au centre d'un axe gradué se déplace aléatoirement vers la droite ou vers la gauche avec probabilité 1/2.

On note $X_0=0$ sa position initiale, puis X_n sa position à l'issue de $n \geq 1$ sauts.

Par expérimentation on a obtenu les lois :

k	**-4**	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
$P(X_0=k)$					1				
$P(X_1=k)$				0,5		0,5			
$P(X_2=k)$			0,25		0,5		0,25		
$P(X_3=k)$		0,125		0,375		0,375		0,125	
$P(X_4=k)$	0,0625		0,25		0,375		0,25		0,0625

2. Indépendance

<u>Définition :</u> On dit que les variables aléatoires X_1 , X_2 , X_3 , ... , X_n sont *mutuellement indépendantes* si pour tous x_1, x_2, x_3, ... , x_n on a

$$P(X_1=x_1 \cap X_2=x_2 \cap ... \cap X_n=x_n)=P(X_1=x_1)\times P(X_2=x_2)\times ... \times P(X_n=x_n)$$

Dans les situations précédentes, les lancers des 3 dés et les déplacements de la puce sont implicitement indépendants.

Exercice : Soit n un entier non nul. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On pioche m boules avec remise, et on note X_1 , X_2, X_3, ... , X_m les numéros obtenus.

1. Quelle est la loi commune suivie par les variables aléatoires X_1 , X_2, X_3, ... , X_m ?

2. On note Y = max(X_1 , X_2, X_3, ... , X_m) le plus grand des numéros obtenus.

   a) Justifier que $(Y \leq k)=\cap_{i=1}^{m}(X_i \leq k)$.

   b) En déduire $P(Y \leq k)$ puis la loi de Y.

<u>Théorème : Lemme des coalitions</u>

Soient X_1 , X_2 , X_3 , ... , X_n des variables aléatoires <u>indépendantes</u> , et $k \in [[1, n]]$

Alors toute fonction de X_1 , X_2 , ... , X_k est indépendante de toute fonction de X_{k+1} , ... , X_n

Exemple : Si X_1 , X_2, X_3 et X_4 sont les résultats de quatre dés équilibrés à 6 faces, alors la somme des deux premiers dés X_1+X_2 est indépendante du produit des deux autres dés $X_3 \times X_4$

3. Stabilité des lois usuelles

<u>Proposition :</u> Si X_1 , X_2 , X_3 , ... , X_k sont variables aléatoires <u>indépendantes</u> suivant des lois binomiales de même paramètre p :

$$X_1 \rightarrow B(n_1 , p) , X_2 \rightarrow B(n_2,p) , \dots , X_k \rightarrow B(n_k,p)$$

Alors la variable aléatoire $X_1+X_2+..+X_k$ suit une loi binomiale $B(n_1+n_2+...+n_k , p)$

Explication :

X_i : nombre de succès dans un schéma de bernoulli à n_i étapes

On fait succéder ces schémas en un grand schéma à $n_1+n_2+...+n_k$ étapes :

$X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_{n_k}$ comptabilise alors le nombre total de succès.

<u>Cas particulier :</u> Si X_1 , X_2 , X_3 , ... , X_n sont *n* variables aléatoires <u>indépendantes</u> suivant toutes la même loi de Bernoulli de même paramètre p, alors leur somme $X_1+X_2+..+X_k$ suit une loi binomiale $B(n , p)$

<u>Proposition :</u> Si X_1 , X_2 , X_3 , ... , X_k sont variables aléatoires <u>indépendantes</u> suivant des lois de Poisson :

$$X_1 \rightarrow P(\lambda_1) , X_2 \rightarrow P(\lambda_2) , \dots , X_k \rightarrow P(\lambda_k)$$

Alors la variable aléatoire $X_1+X_2+..+X_k$ suit une loi de poisson $P(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k)$

Explication :

X_i : nombre d'occurences d'un événement E_i sur une période de temps donnée.

$X_1 + X_2 + X_3 + ... + X_{n_k}$: nombre total d'occurrences des tous les événements considérés

4. Espérance et variance

<u>Proposition :</u> Soient X_1 , X_2 , X_3, ... , X_n des variables aléatoires.

- Si X_1 , X_2 , X_3, ... , X_n ont une espérance, alors :

$$E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n)$$

- Si X_1 , X_2 , X_3, ... , X_n ont une variance et si elles sont <u>indépendantes</u>, alors

$$V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_n)$$

Démonstration : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes.

Pour tout entier $n\geq 2$ on pose

$$P(n) : \text{" } E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n) \text{ et}$$

$$V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_n) \text{ "}$$

Initialisation : Pour n = 2

Hérédité : Supposons que pour un entier n donné on ait

$E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n)$ et $V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_n)$

Montrons que $E(X_1 + X_2 + ... + X_{n+1}) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_{n+1})$

et $V(X_1 + X_2 + ... + X_{n+1}) = V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_{n+1})$

Conclusion : Par récurrence , pour tout entier n ,

$E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n)$ et $V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_n)$

Remarque : Si X_1 , X_2 , X_3, ... , X_n ne sont pas indépendants, alors on a la formule

$V(X_1 + X_2 + ... + X_n) =$