

Fiche méthode n°3 – Eléments de raisonnement et ensembles

Pour réaliser un raisonnement par récurrence simple :

- Suivre les étapes du schéma de rédaction :
 - Enoncer la proposition $P(n)$ en précisant le domaine des valeurs de n .
 - Initialisation : Vérifier que $P(n)$ est vraie pour la première valeur de n .
 - Hérédité : Supposer $P(n)$ vraie pour un certain entier n , et en déduire $P(n+1)$.
 - Conclusion : Enoncer que $P(n)$ est vraie pour tout n .

Pour prouver une implication $P \Rightarrow Q$, on peut :

- Supposer P vraie, et par une succession d'implications conclure que Q est vraie.
- Prouver la contraposée $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ (parfois plus aisée) par la méthode décrite ci-dessus.

Pour prouver une équivalence $P \Leftrightarrow Q$:

- Reasonner par *double implication* : montrer que $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

Pour faire un raisonnement par disjonction :

- Scinder les hypothèses de départ en différents cas de figure qui aboutissent tous à la conclusion souhaitée.

Pour faire un raisonnement par l'absurde :

- Supposer la proposition fausse, et en déduire une absurdité (proposition manifestement fausse) par implication.

Pour montrer une inclusion $A \subset B$, on peut :

- montrer l'implication $x \in A \Rightarrow x \in B$ par une suite d'implications.
- montrer que $B = A \cup X$ (où X est un autre ensemble).
- montrer que $A = B \cap X$ (où X est un autre ensemble).

Pour montrer une égalité d'ensembles $A = B$, on peut :

- Reasonner par *double inclusion* : montrer que $A \subset B$ et $B \subset A$
- Simplifier les expressions en jeu avec :
 - Les lois de De Morgan $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
 - La distributivité $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Pour calculer un coefficient binomial $\binom{n}{k}$, on peut :

- Utiliser la formule $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- Utiliser la *formule de Pascal* : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Pour calculer une somme binomiale :

- Utiliser la *formule du binôme de Newton* $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$