Devoir surveillé n°4

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
L'utilisation de toute **calculatrice** *et de* **tout matériel électronique** *est interdite.*

Le sujet comporte 4 pages ainsi qu'une annexe que vous devrez rendre avec votre copie.

Exercice 1. *d'après EMLyon 2014.*
On considère l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. Montrer que ε est un espace vectoriel et que (A, B, C) est une base de ε.

2. Établir que ε est stable par multiplication, c'est à dire :

$$\forall (M, N) \in \varepsilon^2, MN \in \varepsilon$$

3. Montrer que, pour toute matrice M de ε, si M est inversible alors $M^{-1} \in \varepsilon$.

Pour toute matrice de ε, on note $f(M) = TMT$.

4. Montrer que f est un endomorphisme de ε.

5. Vérifier que T est inversible et démontrer que f est un automorphisme de ε. *(ie que f est bijective)*

6. Est-ce que T est diagonalisable ?

On note F la matrice de f dans la base (A, B, C) de ε.

7. Calculer $f(A), f(B), f(C)$ en fonction de (A, B, C) et en déduire F.

8. Calculer la matrice $(F - I_3)^2$.

9. Montrer que f admet une valeur propre et une seule et déterminer celle-ci, puis déterminer une base et la dimension du sous-espace propre pour f associé à cette valeur propre.

10. Est-ce que f est diagonalisable ?

11. Soit λ un réel différent de 1. Résoudre l'équation $f(M) = \lambda M$, d'inconnue $M \in \varepsilon$.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

12. Calculer H^2, puis pour tout a de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}$, $(I + aH)^n$.

13. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, F^n.

14. Trouver une matrice G de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $G^3 = F$.
Existe-t-il un endomorphisme g de ε tel que $g \circ g \circ g = f$?

Exercice 2. *d'après EMLyon 2014.*
On considère l'application $\varphi :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto e^x - xe^{\frac{1}{x}}$. On admet $2 < e < 3$.

Partie A : Étude de la fonction φ

1. Montrer que φ est de classe C^3 sur $]0;+\infty[$, calculer, pour tout x de $]0;+\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ et montrer :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5}e^{\frac{1}{x}}$$

2. Étudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
En déduire le sens de variation de φ', et montrer :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \varphi'(x) \geqslant e$$

3. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

4. Déterminer la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5. On admet : $15 < \varphi(3) < 16$.
Montrer, en intégrant l'inégalité établie à la question ***2.*** :

$$\forall x \in [3;+\infty[, \varphi(x) - \varphi(3) \geqslant e(x-3)$$

puis

$$\forall x \in [3;+\infty[, \varphi(x) \geqslant ex$$

6. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de φ. Montrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion, déterminer les coordonnées de celui-ci et l'équation de la tangente en ce point.

7. Dresser le tableau de variations de φ, avec les limites en 0 et en $+\infty$, et la valeur en 1.

8. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et faire apparaître la tangente au point d'inflexion.

Partie B : Étude d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note $U = \mathbb{R} \times]0;+\infty[$ et on considère l'application : $f : U \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto xy - e^x \ln y$.

9. Montrer que f est de classe C^2 sur l'ouvert U.

10. Calculer, pour tout (x,y) de U, les dérivées partielles premières et les dérivées partielles secondes de f au point (x,y).

11. Établir que, pour tout (x,y) de U, (x,y) est un point critique de f si et seulement si :

$$x > 0 \text{ et } y = e^{\frac{1}{x}} \text{ et } \varphi(x) = 0$$

12. En déduire que f admet un point critique et un seul, et qu'il s'agit de $(1, e)$.

13. Est-ce que f admet un extremum local en $(1, e)$?

14. Est-ce que f admet un extremum local sur U ?

Partie C : Étude d'une suite et d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

15. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 3e^n$. (On pourra utiliser les résultats de la partie A).

16. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante et que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.

17. Écrire un programme en Python qui affiche et calcule le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 10^3$.

18. Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$?

Exercice 3. *d'après EMLyon 2018*.

Partie A : Étude d'une première variable aléatoire

On dispose d'une pièce truquée qui amène Pile avec une probabilité $p \in]0,1[$. On effectue des lancers avec cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note alors X le nombre de lancers effectués.

1. (a) Donner la loi suivie par X.

(b) Rappeler l'espérance et la variance de X.

2. On note Y le nombre de Face obtenus avant l'apparition du premier Pile.

(a) Exprimer Y en fonction de X.

(b) En déduire l'espérance et la variance de Y.

(c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, P[Y = n] = (1-p)^n p$ et $\mathbf{P}[Y \geq n] = (1-p)^n$.

Partie B : Étude d'une deuxième variable aléatoire

On considère une autre pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$, avec laquelle on effectue une succession illimitée de lancers. On note :

- Pour tout entier non nul k, les événements :
  P_n : *" Le n-ième lacer a donné Pile"* et F_n : *" Le n-ième lacer a donné Face"*
- Pour tout entier non nul n , la variable aléatoire Z_n égale au nombre de Pile obtenus au cours des n premiers lancers ;
- U la variable aléatoire égale au nombre de Face obtenus avant l'apparition du second Pile.

Par exemple, la succession :

Face, Pile, Face, Face, Face, Pile

correspond à l'événement $F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap F_4 \cap F_5 \cap P_6$. Dans ce cas $Z_6 = 2$ et $U = 4$.

3. (a) Donner la loi de Z_n.

(b) Rappeler l'espérance et la variance de Z_n.

4. (a) Décrire les événements $[U = 0]$, $[U = 1]$, $[U = 2]$ à l'aide des événements $\{P_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $\{F_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$, puis calculer leurs probabilités.

(b) Justifier l'égalité des événements :

$$[U = n] \quad \text{et} \quad [Z_{n+1} = 1] \cap P_{n+2}$$

(c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{P}[U = n] = (n+1)\dfrac{4}{3^{n+2}}$.

5. Montrer que la variable aléatoire U possède une espérance $E(U)$ et calculer sa valeur.

Partie C : Étude d'un jeu

Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

— le joueur A dispose d'une pièce amenant Pile avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on rappelle que la variable aléatoire U représente le nombre de Face alors obtenus ;

— le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on rappelle que la variable aléatoire Y représente le nombre de Face alors obtenus ;

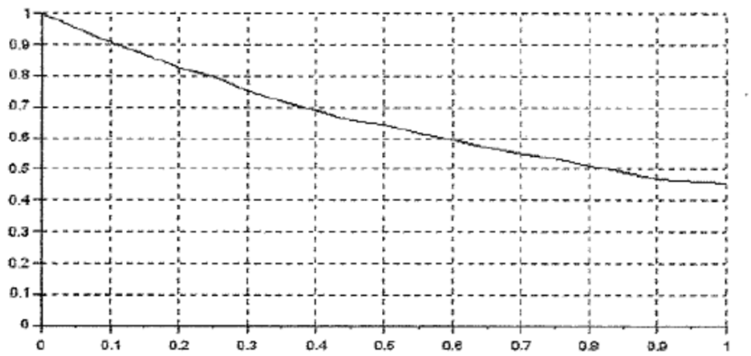
— Le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est ***équilibré*** lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

6. **Simulation informatique**

(a) Sur la feuille annexe, compléter les deux algorithmes Python afin de simuler les variables aléatoires U et Y.

(b) À l'aide d'un grand nombre de simulations on a pu tracer, en fonction de p, une estimation de la probabilité que A remporte la partie.



À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour laquelle le jeu serait équilibré.

7. **Étude théorique de la condition d'équité**

(a) En utilisant le système complet d'événements $(U=n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (\,U=1\,,\,U=2\,,\,...\,)$, montrer que :

$$\mathbf{P}[U \leq Y] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}[U=n]\mathbf{P}[Y \geq n]$$

(b) Déduire des résultats précédents : $\mathbf{P}[U \leq Y] = \dfrac{4}{(2+p)^2}$.

(c) Déterminer la valeur de p pour laquelle le jeu est équilibré.

Partie D : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce de la partie **B** jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n+1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule dans cette urne.

On note toujours U la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note N la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose $V = U - N$.

8. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire N.

(b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de N sachant $[U=n]$.

(c) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$P[N=k] = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} P[U=n] \quad \text{puis} \quad P[N=k] = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

(d) Montrer que N admet une espérance et une variance et les calculer.

9. (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V.

(b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant $[U=n]$.

(c) En déduire la loi de V.

10. Montrer que les variables aléatoires N et V sont indépendantes.

11. Que vaut $Cov(N,V)$? En déduire $Cov(U,N)$.